

# Funktionalanalysis

Mitschrift zur Vorlesung

Prof. Dr. Maier-Paape

WS 17/18



# Inhaltsverzeichnis

1	Die lineare Struktur	7
1	Der lineare Raum . . . . .	7
2	Beispiele . . . . .	8
3	Lineare Abbildungen . . . . .	8
4	Duale Räume . . . . .	10
2	Topologie	13
1	Topologische Räume . . . . .	13
2	Metrische Räume . . . . .	16
3	Vollständigkeit in metrischen Räumen und der Satz von Baire . . . . .	17
3	Topologische lineare Räume	21



## Motivation

In der klassischen Analysis haben wir Funktionen im  $\mathbb{K}^n$ , wobei  $\mathbb{K}$  entweder  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  ist, untersucht. Dabei war das Betrachten von Eigenschaften wie Konvergenz, Stetigkeit und Differenzierbarkeit sehr nützlich. Die Funktionalanalysis beschäftigt sich nun mit vergleichbaren Problemen in üblicherweise unendlich-dimensionalen Funktionenräumen. Hierfür werden wir versuchen, die aus der klassischen Analysis bekannten Untersuchungsmethoden zu verallgemeinern. Doch zunächst ein paar Probleme, für deren Lösung man die Funktionalanalysis benötigt.

**Problem.** Ein klassisches Beispiel aus der Variationsrechnung: Wir wollen die Funktion

$$f(u) = \int_0^\pi |u'(x)|^2 dx$$

unter den Nebenbedingungen  $u(0) = u(\pi) = 0$  und  $\int_0^\pi |u(x)|^2 dx = 1$  minimieren. In der klassischen Analysis haben wir für Minimierungsprobleme mit Nebenbedingungen Lagrange-Multiplikatoren genutzt. Im unendlich-dimensionalen Fall ist das jedoch nicht so einfach. Wir betrachten  $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$  wie oben, wobei  $Y$  eine Teilmenge des unendlich-dimensionalen Funktionenraums

$$X = \{u \in C^1[0, \pi] : u(0) = u(\pi) = 0\}$$

ist, die durch

$$Y = \left\{ u \in X : \int_0^\pi |u(x)|^2 dx = 1 \right\}$$

gegeben ist. Zwar ist  $Y$  (in der  $\mathcal{L}^2([0, \pi])$ -Metrik) beschränkt und abgeschlossen, jedoch nicht kompakt.

**Problem (Fourierreihenentwicklung).** Sei  $\mathcal{T} = \{1, \cos t, \sin t, \cos(2t), \sin(2t), \dots\} = \{\phi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Dann ist bekanntlich

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \int_0^{2\pi} \phi_i(t) \phi_j(t) dt = 2\pi \delta_{i,j},$$

wobei  $\delta_{i,j}$  das Kronecker-Delta bezeichne. Also lässt sich durch Normierung ein Orthonormalsystem aus  $\mathcal{T}$  gewinnen. Jetzt fragen wir uns, ob sich jede  $2\pi$ -periodische Funktion  $u$  bezüglich eines geeigneten Konvergenzbegriffs in eine Reihe  $u = \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i \phi_i$  mit  $\alpha_i \in \mathbb{R}$  entwickeln können. Bereits bekannt ist, dass das für das entsprechende endlich-dimensionale Problem geht: Sei  $T = \{e_1, \dots, e_n\}$  die kanonische Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$ . Dann gilt bekanntlich

$$\langle e_i, e_j \rangle_{\mathbb{R}^n} = \delta_{i,j}$$

und für jedes  $x \in \mathbb{R}^n$  ist

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \quad \alpha_i = \langle x, e_i \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Wir fragen uns nach den Zusammenhängen zwischen den Problemen im endlich- und unendlich-dimensionalen.

**Problem.** Das Biegemoment eines Trägers kann man als Randwertaufgabe (gesucht ist  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , gegeben sind  $p, r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ )

$$u''(t) + p(t)u(t) = r(t), \quad u(0) = u(1) = 0$$

bestimmen. Mit Hilfe der sogenannten Green'schen Funktion lässt sich diese Randwertaufgabe in eine Integralgleichung

$$(T_u)(t) := \int_0^1 G(t, s)(r(s) - p(s)u(s))ds = u$$

umwandeln. Das heißt, man sucht einen Fixpunkt eines Integraloperators  $T$  in einer geeigneten Menge von Funktionen.

Diese Probleme lassen sich mit der klassischen Analysis nicht mehr behandeln. In der Funktionalanalysis behandeln wir nun im Wesentlichen „Analysis in  $\infty$ -dimensionalen Räumen“ (meist Funktionenräume). Das heißt, wir wollen jetzt anstelle des  $\mathbb{K}^n$  allgemeinere Räume betrachten, die jedoch immer noch folgende beide Charakteristika aufweisen:

- (a) Die lineare Struktur (das heißt, Elemente lassen sich addieren und mit einem Skalar multiplizieren)
- (b) Die topologische Struktur (also insbesondere ein Konvergenzbegriff)

Unser Ziel ist es zunächst, die beiden Strukturen zu erarbeiten.

# Kapitel 1

## Die lineare Struktur

### §1 Der lineare Raum

Sei im folgenden stets  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ . Zunächst die

**(1.1) Definition (Vektorraum).** Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper. Eine Abelsche Gruppe  $(X, +)$  zusammen mit einer Abbildung

$$\cdot : \mathbb{K} \times X \rightarrow X$$

heißt  $\mathbb{K}$ -Vektorraum, falls für alle  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  und  $x, y \in X$  gilt:

$$(V1) \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$(V2) \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$(V3) \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$$

$$(V4) \quad 1 \cdot x = x$$

**Bemerkung.** Je nachdem, ob  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  gilt, heißt  $X$  ein *komplexer* oder ein *reeller* Vektorraum.

**Bemerkung.** Eine nichtleere Teilmenge  $Y \subset X$  ist bereits dann ein linearer Raum, falls aus  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, x, y \in Y$  bereits  $\alpha x + \beta y \in Y$  folgt, also  $Y$  abgeschlossen unter den Vektorraumoperationen ist.  $Y$  heißt dann *linearer Teilraum* oder auch *linearer Unterraum*.

**Bemerkung.** Zu jeder Teilmenge  $M \subset X$  bildet die Menge aller Linearkombinationen von je endlich vielen Elementen einen linearen Teilraum von  $X$ . Dieser heißt die *lineare Hülle* von  $M$  oder der *Aufspann* von  $M$

$$\text{span } M = \left\{ x \in X : \exists l \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_l \in \mathbb{K}, m_1, \dots, m_l \in M \text{ mit } \sum_{i=1}^l \alpha_i m_i = x \right\}.$$

**Bemerkung.**  $M = \{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset X$  heißt *Basis* oder *Hamel-Basis* von  $X$ , falls  $M$  *linear unabhängig*, das heißt,  $0 \in X$  lässt sich nur auf triviale Art und Weise als Linearkombination endlich vieler der  $x_\lambda$  schreiben, und  $\text{span } M = X$  ist.

### 3 Lineare Abbildungen

**Bemerkung.** Besitzt  $X$  eine Basis von  $n < \infty$  Elementen, dann heißt  $n$  die *Dimension* von  $X$  und wir schreiben  $\dim X = n$ . Andernfalls heißt  $X$  *unendlich-dimensional* ( $\dim X = \infty$ ).

**Bemerkung.** Seien  $X_1, X_2 \subset X$  lineare Teilräume. Dann ist

$$X_1 + X_2 := \{\alpha x_1 + \beta x_2 : \alpha, \beta \in \mathbb{K}, x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$$

ebenfalls ein linearer Teilraum. Falls  $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ , schreiben wir  $X_1 \oplus X_2$  und nennen die Summe *direkt*.

**Bemerkung.** Sei  $Y$  ein linearer Teilraum von  $X$ . Definiere die Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $X$  durch  $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y$ . Dann wird die Menge der Äquivalenzklassen mit vertreterweiser Addition und Multiplikation auch ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum. Wir schreiben für diesen Vektorraum  $X/Y$ .

## § 2 Beispiele

**(2.1) Beispiel.** Der  $\mathbb{R}^n$  ist ein linearer Raum über dem Körper  $\mathbb{R}$ . Der  $\mathbb{C}^n$  ist sowohl ein  $\mathbb{C}$ - als auch ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

**(2.2) Beispiel.** Sei  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Dann ist

$$C[a, b] = \{x : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}, x \text{ ist stetig}\}$$

ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum mit  $\dim C[a, b] = \infty$ . Zum Beispiel sind die Monome  $(t^k)_{k \in \mathbb{N}}$  ein unendliches linear unabhängiges System, jedoch keine Basis. Tatsächlich ist jede Basis dieses Raumes überabzählbar.

## § 3 Lineare Abbildungen

**(3.1) Definition.** Seien  $X, Y$  lineare Räume über  $\mathbb{K}$ .  $A : X \rightarrow Y$  heißt *linear*, falls für alle  $x_1, x_2 \in X$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  gilt:

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2).$$

$A : X \rightarrow \mathbb{K}$  heißt *lineares Funktional*. Für  $A$  linear heißt  $R(A) = \text{im } A = \{A(x) : x \in X\}$  der *Bildraum* von  $A$  und  $N(A) = \ker A = \{x \in X : A(x) = 0\}$  der *Kern* von  $A$ .

**(3.2) Bemerkung.** Sei  $A : X \rightarrow Y$  linear.

- (a) Sei  $M \subset X$  ein linearer Unterraum. Dann ist  $A(M) \subset Y$  wieder ein linearer Unterraum und es gilt  $\dim A(M) \leq \dim M$  mit Gleichheit bei Injektivität.



(b) Es gilt

$$A \text{ injektiv} \iff N(A) = \{0\}.$$

Allgemeiner ist

$$X/(N(A)) \cong \text{im } A.$$

- (c) Falls  $\dim X = \dim Y = n < \infty$ , dann ist  $A$  genau dann injektiv, wenn  $A$  surjektiv ist.
- (d)  $A : X \rightarrow Y$  ist linear und bijektiv genau dann, wenn es eine lineare Umkehrabbildung  $A^{-1} : Y \rightarrow X$ .
- (e) Falls so ein  $A : X \rightarrow Y$  linear und bijektiv existiert, nennen wir  $X$  und  $Y$  *linear isomorph*.  $A$  heißt dann ein *linearer Isomorphismus*.

Nur falls  $\dim X = \dim Y < \infty$  sind  $X$  und  $Y$  auch „topologisch“ isomorph. In diesem Fall erhält man die Prototypen  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$  für endlich-dimensionale Vektorräume und andere gibt es nicht (die sie auch als Topologische Räume isomorph sind).

**Beispiel.**  $X = \{x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x, \dot{x}, \ddot{x} \text{ stetig}, x(a) = \dot{x}(a) = 0\}$  ist ein linearer Raum. Sei  $Y = C[a, b]$  und  $A : X \rightarrow Y$  gegeben durch

$$(Ax)(t) := \ddot{x}(t) + c_1(t)\dot{x}(t) + c_2(t)x(t), \quad t \in [a, b], c_1, c_2 \in C[a, b].$$

Dann ist  $A$  linear, weil differenzieren linear ist und  $A$  ist injektiv: Zunächst ist  $x = 0$  eine Lösung der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung  $Ax = 0$ . Die Theorie der Differentialgleichungen sagt uns, dass diese Differentialgleichung eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems ist.

$A$  ist aber auch surjektiv: Sei  $y \in Y$  gegeben, dann suchen wir  $x \in X$  mit  $Ax = y$ . Also wollen wir eine inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung lösen. Auch diese ist nach der Theorie von gewöhnlichen Differentialgleichungen eindeutig lösbar.

Also ist  $A$  bijektiv, das heißt, es gibt eine lineare Abbildung  $A^{-1} : Y \rightarrow X$ . Diese Inverse ist in der Regel schlecht anzugeben. Einen einfacheren Spezialfall dazu wird in der Übung behandelt.

**Beispiel.** Sei  $X = Y = C[a, b]$ ,  $A : X \rightarrow X$  gegeben durch

$$(Ax)(t) := \int_a^b k(s, t)x(s)ds, \quad t \in [a, b],$$

wobei  $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und gegeben ist. Dann ist  $A$  linear, da das Integral linear ist. Auch ist, wenn  $\lambda \in \mathbb{R}$  ein Parameter ist, die Abbildung

$$(A_\lambda x)(t) := \lambda x(t) - (Ax)(t), \quad t \in [a, b]$$

linear. Die Probleme  $Ax = y$  (bei gegebenem  $y \in Y$  und gesuchtem  $x \in X$ ) oder  $A_\lambda x = 0$  (gesucht

#### 4 Duale Räume

ist  $\lambda \in \mathbb{R}$  und eine nichttriviale Lösung  $x \in X \setminus \{0\}$  heißen Integralgleichungen erster und zweiter Ordnung.

**Beispiel.** Sei  $X = C[a, b]$ ,  $A : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$Ax = x(t_0),$$

wobei  $t_0 \in [a, b]$  fest gewählt sei. Eine andere lineare Abbildung  $A : X \rightarrow \mathbb{R}$  ist gegeben durch

$$Ax = \int_a^b x(t) dt$$

Dann sind beide Abbildungen  $A$  linear und nicht injektiv, aber surjektiv.

**Beispiel.** Sei  $X = \ell^2$ ,  $A : X \rightarrow X$ . Für  $x = (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sei

$$Ax = (0, \xi_1, \xi_2, \dots) \in \ell^2.$$

$A$  heißt (Rechts-)Shiftoperator und ist linear und injektiv, jedoch nicht surjektiv. Solche Abbildungen gibt es für  $\dim X = \dim Y < \infty$  nicht.

### §4 Duale Räume

$A : X \rightarrow \mathbb{K}$  sei ein lineares Funktional,  $X$  ein linearer Raum. Wir verwenden ein neues Symbol (statt  $A$ )

$$x' : X \rightarrow \mathbb{K} = \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases} \quad \text{linear.}$$

Wir schreiben nun

$$x'(x) =: \langle x, x' \rangle = \langle x, x' \rangle_{X \times X^f} \in \mathbb{K}.$$

Wir setzen

$$X^f := \{x' : x' \text{ ist lineares Funktional auf } X\}.$$

Hierbei sollte man nicht  $x'$  nicht mit der Ableitung von  $x$  verwechseln. Auch ist  $\langle -, - \rangle_{X \times X^f}$  kein Skalarprodukt.

Der Raum  $X^f$  wird auf natürlicher Weise zum linearen Raum mit

$$(ax'_1 + \beta x'_2)(x) := ax'_1(x) + \beta x'_2(x), \quad x \in X, x'_1, x'_2 \in X^f, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

So ist

$$\langle -, - \rangle_{X \times X^f} : X \times X^f \rightarrow \mathbb{K}$$

bilinear.

**(4.1) Definition.**  $X^f$  heißt der *algebraische Dualraum* zu  $X$ .  $X^{ff} := (X^f)^f$  heißt der *biduale Raum* zu  $X$ .

**Beispiel.**  $X^{ff}$  liefert die kanonische Abbildung

$$J : X \rightarrow X^{ff}, x \mapsto J(x) = x''$$

mit

$$\langle x', x'' \rangle := \langle x, x' \rangle \quad \forall x' \in X^f.$$

Damit ist  $x'' : X^f \rightarrow \mathbb{K}$  linear wohldefiniert.

**(4.2) Definition.** Der lineare Raum  $X$  heißt *algebraisch reflexiv*, falls  $J$  bijektiv ist (und damit  $X$  linear isomorph zu  $X^{ff}$ ) ist.

**(4.3) Bemerkung.**  $X$  ist genau dann algebraisch reflexiv, wenn  $\dim X < \infty$  ist.

Im Fall  $\dim X < \infty$  lässt sich leicht eine duale Basis angeben: Sei dazu  $M := \{x_1, \dots, x_n\}$  eine Basis von  $X$ . Dann wird durch

$$\langle x_i, x'_k \rangle := \delta_{i,k}$$

und linearer Fortsetzung die Menge  $M := \{x'_1, \dots, x'_n\} \subset X^f$  erklärt. Dann ist  $M'$  eine Basis von  $X'$ , die die *duale Basis* von  $M$  genannt wird. Tatsächlich ist  $X^f$  im Falle  $\dim X = \infty$  wesentlich größer. Man wählt deshalb eine (neue) Definition des Dualraums:

**(4.4) Definition (Dualraum).** Zu einem linearen Raum  $X$  ist

$$X' := \{x' : X \rightarrow \mathbb{K}, x' \text{ linear und stetig}\} \subset X^f$$

der Dualraum von  $X$ .

Um Allerdings von Stetigkeit reden zu können, müssen wir zunächst *Topologien* einführen.



# Kapitel 2

## Topologie

### §1 Topologische Räume

**(1.1) Definition.** Sei  $X$  eine Menge und  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$  eine Menge von Teilmengen von  $X$ .  $\mathcal{T}$  heißt eine *Topologie* auf  $X$ , falls  $\mathcal{T}$  unter endlichen Durchschnitten und beliebigen Vereinigungen abgeschlossen ist. Insbesondere muss  $\mathcal{T}$   $\emptyset$  als leere Vereinigung und  $X$  als leeren Schnitt enthalten.  $(X, \mathcal{T})$  heißt dann *topologischer Raum*. Die Elemente von  $\mathcal{T}$  heißen *offene Mengen*.

- (1.2) Beispiele.**
- (a) Für alle Mengen  $X$  ist  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$  eine Topologie auf  $X$ , die sogenannte *indiskrete Topologie*, *gröbste Topologie* oder auch *Klumpentopologie*.
  - (b) Für alle Mengen  $X$  ist  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$  eine Topologie, die sogenannte *diskrete Topologie* oder *feinste Topologie* auf  $X$ .
  - (c) In Analysis I wird eine Menge  $U \subset \mathbb{R}$  für offen erklärt, wenn es zu jedem  $x \in U$  ein  $\varepsilon > 0$  gibt, so dass für alle  $y \in \mathbb{R}$  mit  $|x - y| < \varepsilon$  auch  $y \in U$  gilt. Aus der Analysis ist bekannt, dass die so definierten offenen Mengen den Axiomen genügen. Diese Topologie  $\mathcal{T}_{\text{nat}}$  wird *natürliche Topologie* genannt.
  - (d) Sei  $X$  eine beliebige Menge. Die *cofinite Topologie* auf  $X$  wird definiert als

$$\mathcal{T}_{\text{cof}} = \{Y \subset X : Y = \emptyset \text{ oder } \mathbb{C}_X Y \text{ ist endlich}\}$$

- (e) Der *Sierpinski-Raum* ist die Menge  $\{0, 1\}$  versehen mit der Topologie  $\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$ .

**(1.3) Definition.** Sei  $M \subset X$ .

- (a)  $M$  heißt *abgeschlossen*, wenn  $X \setminus M$  offen ist.
- (b)  $U \subset X$  heißt *Umgebung von A*, wenn es eine offene Menge  $V$  gibt mit  $A \subset V \subset U$ .  
Wir setzen

$$\mathcal{U}_A := \mathcal{U}_A(\mathcal{T}) := \{U \subset X : U \text{ Umgebung von } A\}.$$

$\mathcal{U}_A$  heißt *Umgebungssystem* oder *Umgebungsfilter* von  $A \subset X$ . Für  $x \in X$  setzen wir  $\mathcal{U}_x := \mathcal{U}_{\{x\}}$ .  $x$  heißt dann *innerer Punkt* von  $U$  für alle  $U \in \mathcal{U}_x$ .

(c)  $x \in X$  heißt *Häufungspunkt* von  $M$ , falls jede Umgebung von  $x_0$  ein  $y \in M$  enthält mit  $y \neq x$ .

(d) Das *Innere* von  $M$  ist

$$M^\circ := \bigcup \{U \in \mathcal{T} : U \subset M\}$$

die größte offene Menge, die in  $M$  enthalten ist.

(e) Der *Abschluss* von  $M$  ist

$$\overline{M} := \bigcap \{U \subset M : U \text{ abgeschlossen}\}$$

die kleinste abgeschlossene Menge, die  $M$  enthält.

(f)  $M$  heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung von  $M$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

(g)  $M$  heißt *dicht*, falls  $\overline{M} = X$ .

(h)  $M$  heißt *nirgends dicht*, falls  $(\overline{M})^\circ = \emptyset$ .

**(1.4) Bemerkung.** (a)  $M^\circ \subset M \subset \overline{M}$ .

(b)  $M^\circ$  ist die Menge der inneren Punkte von  $M$ .

(c)  $M$  ist genau dann abgeschlossen, wenn  $M = \overline{M}$ .

**(1.5) Definition (Hausdorff-Raum).** Sei  $(X, \mathcal{T})$  ein topologischer Raum. Für alle  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$  existieren  $U \in \mathcal{U}_x, V \in \mathcal{U}_y$  mit  $U \cap V = \emptyset$ . Dann heißt  $(X, \mathcal{T})$  Hausdorff-Raum bzw. genügt dem Trennungsaxiom.

**(1.6) Definition (Konvergenz).** Eine Folge  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  heißt konvergent gegen  $x_0 \in X$ , falls zu jeder Umgebung  $U \in \mathcal{U}_{x_0}$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  existiert, sodass  $x_n \in U$  für alle  $n \geq n_0$ .

**(1.7) Bemerkung.** Man überlegt sich leicht, dass der Grenzwert  $x_0$  in der Regel nicht eindeutig ist. Bsp: In  $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$  konvergiert jede Folge gegen jeden Punkt. Ist  $(X, \mathcal{T})$  jedoch ein Hausdorff-Raum, so ist jeder Grenzwert eindeutig.

**Beweis.** Seien  $x_0 \neq x'_0$  Grenzwerte von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ . Dann existieren disjunkte Umgebungen  $U, U' \in \mathcal{U}_{x_0}$ . Weiterhin gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $x_n \in U$  für alle  $n \geq n_0$  und  $n'_0 \in \mathbb{N}$ , so dass  $x_n \in U'$  für alle  $n \geq n'_0$ . Also gilt  $x_{\max\{n_0, n'_0\}} \in U \cap U'$ . Das ist ein Widerspruch zur Disjunktheit der Umgebungen.  $\square$

**(1.8) Definition (Häufungspunkt).**  $x_0 \in X$  heißt Häufungspunkt von  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ , falls zu jeder Umgebung  $U \in \mathcal{U}_{x_0}$  und für alle  $k \in \mathbb{N}$  ein  $n \geq k \in \mathbb{N}$  existiert, sodass  $x_n \in U$ .

**(1.9) Beispiel.**  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$  mit natürlicher Topologie.  $x_n = (-1)^n$  hat zwei HP  $\pm 1$  Achtung:  $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$  hat als Menge keine HP.

**(1.10) Bemerkung.** Für die indiskrete Topologie ist jeder Punkt in  $X$  HP jeder Folge.

**(1.11) Definition (Stetigkeit).**  $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$  heißt stetig, falls für alle  $V \in \mathcal{T}_Y$  gilt, dass  $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$ .

**(1.12) Bemerkung.**  $f$  ist stetig  $\Leftrightarrow f$  ist stetig in jedem Punkt

**(1.13) Definition (Homöomorphismus).** Ist  $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$  bijektiv und stetig, und  $f^{-1} : (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{T}_X)$  auch stetig, dann heißt  $f$  Homöomorphismus.  $X$  und  $Y$  heißen homöomorph, falls so ein Homöomorphismus existiert.

**(1.14) Definition (Basis von Topologien und Umgebungen).** (a) Eine Familie  $B \subset \mathcal{T}$  heißt Basis der Topologie in  $(X, \mathcal{T})$ , falls  $T = \cup M : M \subset B$ .

(b) Eine Familie  $B \subset \mathcal{U}_x$  von  $x \in X$  heißt Umgebungsbasis des Punktes  $x$ , falls für alle  $U \in \mathcal{T}, x \in U$  existiert ein  $V \in B$  mit  $x \in V \subset U$ .

**(1.15) Beispiel.** Für die natürliche Topologie auf  $\mathbb{R}^n$  ist eine Basis der Topologie gegeben durch  $B_\varepsilon(x) : x \in X, \varepsilon > 0$  mit den offenen Kugeln  $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < \varepsilon\}$ . Sei  $x \in \mathbb{R}^n$  fest. Dann ist  $B_{1/n}(x) : n \in \mathbb{N}$  eine abzählbare Umgebungsbasis von  $x$ .

**(1.16) Definition (Relativtopologie oder Spurtopologie).**  $M \subset X$  eines topologischen Raumes  $(X, \mathcal{T})$  lässt sich in natürlicher Weise zu einem topologischen Raum machen, nämlich mit  $\mathcal{T} := \{M \cap V : V \in \mathcal{T}\}$ .

**(1.17) Bemerkung.**  $M = M \cap X \in \mathcal{T}$  da  $X \in \mathcal{T}$ , d.h.  $M$  ist offen in der Spurtopologie. Achtung:  $M$  muss nicht offen in  $X$  sein.

**(1.18) Definition.** Seien zwei Topologien  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$  auf  $X$  gegeben. Wir sagen  $\mathcal{T}_1$  ist feiner als  $\mathcal{T}_2$ , falls  $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$ . Wir sagen  $\mathcal{T}_1$  ist gröber als  $\mathcal{T}_2$ , falls  $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ . Wir sagen die Topologien sind gleich, falls  $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ .

## 2 Metrische Räume

**(1.19) Bemerkung.** Sei  $\mathcal{T}_1$  feiner als  $\mathcal{T}_2$ . Die feinere Topologie  $\mathcal{T}_1$  enthält mehr offene Mengen, und damit zu jedem Grenzwert  $x_0$  weniger konvergente Folgen.

Man zeigt leicht:  $\mathcal{T}_1$  ist feiner als  $\mathcal{T}_2 \iff$  Für alle  $x \in X$  gilt: Seien  $B_1 \subset T_1, B_2 \subset T_2$  Umgebungsbasen von  $x$ , dann gilt für alle  $U \in B_1$ , dass ein  $V \in B_2$  existiert mit  $V \subset U$ .

**(1.20) Beispiel.** Folgende Topologien auf  $\mathbb{R}^n$  sind gleich.  $\mathcal{T}_1$  sei die Topologie, die durch die Kugeln  $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < \varepsilon\}$  erzeugt wird.  $\mathcal{T}_2$  sei die Topologie, die durch die Quader  $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \leq i \leq n} |y_i - x_i| < \varepsilon\}$  erzeugt wird.

**(1.21) Definition (Produkttopologie).** Seien  $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$  topologische Räume. Dann ist die Familie von Mengen  $\{U_X \times U_Y : U_X \in \mathcal{T}_X, U_Y \in \mathcal{T}_Y\} \subset 2^{X \times Y}$  eine Basis der Topologie  $\mathcal{T}_{X \times Y}$  im kartesischen Produkt  $X \times Y$ . Bemerkung: Es genügt auch wenn  $U_X, U_Y$  über Basen von  $\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y$  genommen werden.

## §2 Metrische Räume

**(2.1) Lemma (Eigenschaften metrischer Räume).** Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum.

(a) Jeder Punkt  $x \in X$  besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis

$$\{B_{1/n}(x), n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0.$$

(c) Es ist  $x_0 \in M$  genau dann ein innerer Punkt von  $M \subset X$ , wenn ein  $\varepsilon > 0$  existiert mit  $B_\varepsilon(x_0) \subset M$ .

(d)  $M$  ist nirgends dicht in  $X$  genau dann, wenn es zu jeder Kugel  $B_\varepsilon(x_0)$  mit  $x_0 \in X, \varepsilon > 0$  eine Kugel  $B_\delta(x_1) \subset B_\varepsilon(x_0)$  mit  $B_\delta(x_1) \cap M = \emptyset$  gibt.

(e) Seien  $(X, d_X)$  und  $(Y, d_Y)$  metrische Räume. Dann ist auch  $(X \times Y, d_{X \times Y})$  ein metrischer Raum vermöge der Metrik

$$d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

oder auch mit

$$d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{d_X^2(x_1, x_2) + d_Y^2(y_1, y_2)}.$$

Tatsächlich induzieren diese beiden Metriken die gleiche Topologie (nämlich die Pro-



*dukttopologie)*

- (f) *Homöomorphismen  $f : X \rightarrow Y$  (für metrische Räume  $X, Y$ ), die die Metrik respektieren, das heißt*

$$d_X(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2)) \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

*heißen Isometrien.*

- (g) *Ein metrischer Raum muss im allgemeinen keine lineare Struktur haben. Man betrachte hierzu die Menge  $X := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  mit der diskreten Metrik. Diese kann keine Vektorraumstruktur haben, da  $|X| = 6$  keine Primzahlpotenz ist.*

**Beweis.** Der Beweis wird aufgrund seiner Trivialität den Lesern zur Übung überlassen, da er wirklich nur Einsetzen der Definitionen ist.  $\square$

Nun ein paar Charakterisierungen von kompakten Mengen in metrischen Räumen.

**(2.2) Satz.** *Im metrischen Raum  $(X, d)$  sind äquivalent:*

- (a)  $K \subset X$  ist kompakt (überdeckungskompakt)*
- (b) Jede Folge in  $K$  besitzt mindestens einen Häufungspunkt in  $K$  (abzählbar kompakt)*
- (c) Jede Folge in  $K$  besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in  $K$  (folgenkompakt)*

**(2.3) Bemerkung.** Der Satz gilt so im allgemeinen Hausdorff-Raum *nicht*. Für „(b)  $\Rightarrow$  (a)“ benötigt man zusätzlich das zweite Abzählbarkeitsaxiom, also die Existenz einer abzählbaren Basis der Topologie. Für „(b)  $\Rightarrow$  (c)“ benötigt man das erste Abzählbarkeitsaxiom, also die Existenz von abzählbaren Umgebungsbasen für jeden Punkt.

### § 3 Vollständigkeit in metrischen Räumen und der Satz von Baire

**(3.1) Definition.** Eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  in  $(X, d)$  heißt *Cauchy-Folge*, falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $N = N(\varepsilon)$  existiert mit  $d(x_m, x_n) < \varepsilon$  für alle  $n, m \geq N$ .

**(3.2) Lemma.** *Jede Konvergente Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  ist auch eine Cauchy-Folge.*

**(3.3) Definition.** Der metrische Raum  $(X, d)$  heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge in  $(X, d)$  konvergiert.

Nicht jeder metrische Raum braucht vollständig zu sein (man betrachte hierfür z.B.  $\mathbb{Q}$  und die Folge der Partialsummen der Dezimalbruchentwicklung von  $\sqrt{2}$ ), jedoch lässt sich jeder metrische Raum zu einem vollständigen erweitern.

**(3.4) Satz.** Jeder metrische Raum  $(X, d)$  lässt sich in einen bis auf Isometrie eindeutig bestimmten kleinsten vollständigen metrischen Raum  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  einbetten. Dieser Raum  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  heißt die Vervollständigung von  $(X, d)$ .

**Beweis.** Zwei Cauchyfolgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  seien äquivalent, falls  $d(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Hierdurch ist eine Äquivalenzrelation definiert. Sei  $[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]$  die vom Repräsentanten  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  erzeugte Klasse. Man setzt

$$\tilde{X} := \{[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Cauchy-Folge in } (X, d)\}$$

und

$$\tilde{d}([(x_n)_{n \in \mathbb{N}}], [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}]) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n).$$

Dann ist  $(d(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}$ , da

$$|d(x_n, x_m) - d(y_m, y_n)| \leq \underbrace{d(x_n, x_m)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{d(y_n, y_m)}_{\rightarrow 0}.$$

Da  $\mathbb{R}$  bekanntlich vollständig ist, existiert somit der Grenzwert. Ferner ist  $\tilde{d}$  Repräsentatenunabhängig, also wohldefiniert: Seien  $(\tilde{x}_n)$  und  $(\tilde{y}_n)$  andere Repräsentanten. Dann ist

$$d(x_n, y_n) \leq \underbrace{d(x_n, \tilde{x}_n)}_{\rightarrow 0} + d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) + \underbrace{d(\tilde{y}_n, y_n)}_{\rightarrow 0}.$$

Die umgekehrte Ungleichung ergibt sich aus Vertauschung der Rollen. Man rechnet leicht nach, dass  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  ein vollständiger Raum ist. Wir können  $(X, d)$  durch die entsprechenden konstanten Folgen isometrisch in  $\tilde{X}$  einbetten.  $\square$

**Bemerkung.** Wendet man diese Technik auf  $\mathbb{Q}$  mit der natürlichen Metrik an, dann erhält man  $(\mathbb{R}, d)$  als vollständige Hülle.

**(3.5) Satz (Schachtelsatz).** Sei  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum und seien  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  und  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$  Folgen mit der Eigenschaft

$$(a) \quad \overline{B_{r_{n+1}}}(x_{n+1}) \subset B_{r_n}(x_n)$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

Dann gibt es genau ein  $x_0 \in X$  mit  $x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B_{r_n}}(x_n)$ .

**Beweis.** Für  $p \in \mathbb{N}$  beliebig gilt

$$\overline{B_{r_{n+p}}}(x_{n+p}) \subset \overline{B_{r_n}}(x_n).$$

Also

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Damit ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge und damit konvergiert gegen ein  $x_0 \in X$ . Außerdem gilt

$$d(x_p, x_n) \leq \underbrace{d(x_0, x_{n+p})}_{\rightarrow 0 (p \rightarrow \infty)} + \underbrace{d(x_{n+p}, x_n)}_{\leq r_n}.$$

Damit folgt für  $p \rightarrow \infty$

$$d(x_0, x_n) \leq r_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

also  $x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}_{r_n}(x_n)$ . Für die Eindeutigkeit sei  $\tilde{x}_0$  ebenfalls in  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}_{r_n}(x_n)$ . Dann folgt

$$d(x_0, \tilde{x}_0) \leq \underbrace{d(x_0, x_n)}_{\leq r_n} + \underbrace{d(x_n, \tilde{x}_0)}_{\leq r_n} \leq 2r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Doch damit war bereits  $x_0 = \tilde{x}_0$ . □

**(3.6) Definition.** Eine Teilmenge  $M$  eines metrischen Raumes  $(X, d)$  heißt *von erster Kategorie* oder *mager*, falls sie die Vereinigung abzählbar vieler in  $X$  nirgends dichter Mengen ist. Andernfalls heißt  $M$  *von zweiter Kategorie*.

Der folgende Satz wird beim Beweis mehrerer fundamentaler Sätze benötigt, z.B. beim Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit oder dem Open-Mapping-Theorem.

**(3.7) Satz (Baire).** Jede nichtleere offene Menge eines vollständigen metrischen Raumes  $(X, d)$  ist von zweiter Kategorie (insbesondere  $X$  selbst)

**Beweis.** Sei  $\emptyset \neq M \subset X$  offen. Wir nehmen umgekehrt an,  $M$  wäre von erster Kategorie, das heißt

$$M \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$$

mit  $M_n \subset X$  nirgends dicht. Wähle  $x_0 \in M$ . Da  $M$  offen ist, gibt es ein  $r = r_0 > 0$  mit  $B_{r_0}(x_0) \subset M$ . Da  $M_1$  nirgends dicht ist, gibt es  $r_1 > 0$  und  $x_1 \in X$  mit

$$B_{r_1}(x_1) \subset B_{r_0/2}(x_0)$$

und  $B_{r_1}(x_1) \cap M_1 = \emptyset$ . Analog finden wir, da  $M_2$  nirgends dicht ist,  $r_2 > 0$  und  $x_2 \in X$  mit

$$B_{r_2}(x_2) \subset B_{r_1/2}(x_1)$$

und  $B_{r_2}(x_2) \cap M_2 = \emptyset$ . Durch Fortsetzen dieses Schemas finden wir eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  und Radien  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$  mit  $r_n \leq r/2^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Damit sind alle Voraussetzungen von

### 3 Vollständigkeit in metrischen Räumen und der Satz von Baire

Satz 3.5 erfüllt. Folglich existiert genau ein

$$\tilde{x} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{r_n}(x_n) \subset B_r(x_0) \subset M.$$

Aber  $\tilde{x} \notin M_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  Folglich ist auch  $\tilde{x}$  nicht in  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = M$ . Das ist ein Widerspruch.  
Also ist  $M$  von zweiter Kategorie. □

## Kapitel 3

### Topologische lineare Räume

Erklärtes Ziel dieses Kapitels wird sein, die beiden Strukturen aus den vorherigen beiden Kapiteln, also die Topologie und den linearen Raum zusammenzuführen.

**(0.1) Definition.** Ein linearer Raum  $X$  über dem Körper  $\mathbb{K}$  mit Topologie  $\mathcal{T}$  heißt *topologischer linearer Raum*, falls die Vektorraumoperationen  $(+ : X \times X \rightarrow X$  und  $\cdot : \mathbb{K} \times X \rightarrow X)$  stetig sind.

**Bemerkung.** Stetigkeit der Vektorraumoperationen sollte als minimales Kompatibilitätskriterium der beiden Strukturen gefordert werden. Tatsächlich ist es im Allgemeinen gar nicht erfüllt. Erst im normierten Raum bekommt man diese Stetigkeit geschenkt.