

Funktionalanalysis

Mitschrift zur Vorlesung

WS 17/18

Dies ist eine Vorlesungsmitschrift, die nichts mit den Dozenten oder dem Lehrstuhl, der die Veranstaltung hält, zu tun hat.

Alle Fehler sind vermutlich meine Schuld. Über Verbesserungen und Vervollständigungen freue ich mich sehr. Diese Mitschrift ist unter <https://git.server-speed.net/users/hrnz/funkana.git> verfügbar.

Inhaltsverzeichnis

1	Die lineare Struktur	6
1	Der lineare Raum	6
2	Beispiele	7
3	Lineare Abbildungen	7
4	Duale Räume	9
2	Topologie	11
1	Topologische Räume	11
2	Metrische Räume	13
3	Vollständigkeit in metrischen Räumen und der Satz von Baire	15
3	Topologische lineare Räume	18
1	Normierte Räume	18
2	Topologische lineare Räume	20
3	Metrische lineare Räume und Quasi-normierte Räume	21
4	Beispiele	26
5	Beschränkte und kompakte Mengen in metrischen linearen Räumen	35
6	?	38
4	Unitäre Räume und Hilberträume	44
1	Grundbegriffe	44

Motivation

In der klassischen Analysis haben wir Funktionen im \mathbb{K}^n , wobei \mathbb{K} entweder \mathbb{R} oder \mathbb{C} ist, untersucht. Dabei war das Betrachten von Eigenschaften wie Konvergenz, Stetigkeit und Differenzierbarkeit sehr nützlich. Die Funktionalanalysis beschäftigt sich nun mit vergleichbaren Problemen in üblicherweise unendlich-dimensionalen Funktionenräumen. Hierfür werden wir versuchen, die aus der klassischen Analysis bekannten Untersuchungsmethoden zu verallgemeinern. Doch zunächst ein paar Probleme, für deren Lösung man die Funktionalanalysis benötigt.

Problem. Ein klassisches Beispiel aus der Variationsrechnung: Wir wollen die Funktion

$$f(u) = \int_0^\pi |u'(x)|^2 dx$$

unter den Nebenbedingungen $u(0) = u(\pi) = 0$ und $\int_0^\pi |u(x)|^2 dx = 1$ minimieren. In der klassischen Analysis haben wir für Minimierungsprobleme mit Nebenbedingungen Lagrange-Multiplikatoren genutzt. Im unendlich-dimensionalen Fall ist das jedoch nicht so einfach. Wir betrachten $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ wie oben, wobei Y eine Teilmenge des unendlich-dimensionalen Funktionenraums

$$X = \{u \in C^1[0, \pi] : u(0) = u(\pi) = 0\}$$

ist, die durch

$$Y = \left\{ u \in X : \int_0^\pi |u(x)|^2 dx = 1 \right\}$$

gegeben ist. Zwar ist Y (in der $\mathcal{L}^2([0, \pi])$ -Metrik) beschränkt und abgeschlossen, jedoch nicht kompakt.

Problem (Fourierreihenentwicklung). Sei $\mathcal{T} = \{1, \cos t, \sin t, \cos(2t), \sin(2t), \dots\} = \{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Dann ist bekanntlich

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \int_0^{2\pi} \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt = 2\pi \delta_{i,j},$$

wobei $\delta_{i,j}$ das Kronecker-Delta bezeichne. Also lässt sich durch Normierung ein Orthonormalsystem aus \mathcal{T} gewinnen. Jetzt fragen wir uns, ob sich jede 2π -periodische Funktion u bezüglich eines geeigneten Konvergenzbegriffs in eine Reihe $u = \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i \varphi_i$ mit $\alpha_i \in \mathbb{R}$ entwickeln können. Bereits bekannt ist, dass das für das entsprechende endlich-dimensionale Problem geht: Sei $T = \{e_1, \dots, e_n\}$ die kanonische Standardbasis des \mathbb{R}^n . Dann gilt bekanntlich

$$\langle e_i, e_j \rangle_{\mathbb{R}^n} = \delta_{i,j}$$

und für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, \quad \alpha_i = \langle x, e_i \rangle_{\mathbb{R}^n}.$$

Wir fragen uns nach den Zusammenhängen zwischen den Problemen im endlich- und unendlich-dimensionalen.

Problem. Das Biegemoment eines Trägers kann man als Randwertaufgabe (gesucht ist $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben sind $p, r : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$)

$$u''(t) + p(t)u(t) = r(t), \quad u(0) = u(1) = 0$$

bestimmen. Mit Hilfe der sogenannten Green'schen Funktion lässt sich diese Randwertaufgabe in eine Integralgleichung

$$(T_u)(t) := \int_0^1 G(t, s)(r(s) - p(s)u(s))ds = u$$

umwandeln. Das heißt, man sucht einen Fixpunkt eines Integraloperators T in einer geeigneten Menge von Funktionen.

Diese Probleme lassen sich mit der klassischen Analysis nicht mehr behandeln. In der Funktionalanalysis behandeln wir nun im Wesentlichen „Analysis in ∞ -dimensionalen Räumen“ (meist Funktionenräume). Das heißt, wir wollen jetzt anstelle des \mathbb{K}^n allgemeinere Räume betrachten, die jedoch immer noch folgende beide Charakteristika aufweisen:

- (a) Die lineare Struktur (das heißt, Elemente lassen sich addieren und mit einem Skalar multiplizieren)
- (b) Die topologische Struktur (also insbesondere ein Konvergenzbegriff)

Unser Ziel ist es zunächst, die beiden Strukturen zu erarbeiten.

Kapitel 1

Die lineare Struktur

§ 1 Der lineare Raum

Sei im folgenden stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Zunächst die

(1.1) Definition (Vektorraum). Sei \mathbb{K} ein Körper. Eine Abelsche Gruppe $(X, +)$ zusammen mit einer Abbildung

$$\cdot : \mathbb{K} \times X \rightarrow X$$

heißt \mathbb{K} -Vektorraum, falls für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $x, y \in X$ gilt:

$$(V1) \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$(V2) \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$(V3) \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$$

$$(V4) \quad 1 \cdot x = x$$

Bemerkung. Je nachdem, ob $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt, heißt X ein *komplexer* oder ein *reeller* Vektorraum.

Bemerkung. Eine nichtleere Teilmenge $Y \subset X$ ist bereits dann ein linearer Raum, falls aus $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $x, y \in Y$ bereits $\alpha x + \beta y \in Y$ folgt, also Y abgeschlossen unter den Vektorraumoperationen ist. Y heißt dann *linearer Teilraum* oder auch *linearer Unterraum*.

Bemerkung. Zu jeder Teilmenge $M \subset X$ bildet die Menge aller Linearkombinationen von je endlich vielen Elementen einen linearen Teilraum von X . Dieser heißt die *lineare Hülle* von M oder der *Aufspann* von M

$$\text{span } M = \left\{ x \in X : \exists l \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_l \in \mathbb{K}, m_1, \dots, m_l \in M \text{ mit } \sum_{i=1}^l \alpha_i m_i = x \right\}.$$

Bemerkung. $M = \{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset X$ heißt *Basis* oder *Hamel-Basis* von X , falls M *linear unabhängig*, das heißt, $0 \in X$ lässt sich nur auf triviale Art und Weise als Linearkombination endlich vieler der x_λ schreiben, und $\text{span } M = X$ ist.

Bemerkung. Besitzt X eine Basis von $n < \infty$ Elementen, dann heißt n die *Dimension* von X und wir schreiben $\dim X = n$. Andernfalls heißt X *unendlich-dimensional* ($\dim X = \infty$).

Bemerkung. Seien $X_1, X_2 \subset X$ lineare Teilräume. Dann ist

$$X_1 + X_2 := \{\alpha x_1 + \beta x_2 : \alpha, \beta \in \mathbb{K}, x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$$

ebenfalls ein linearer Teilraum. Falls $X_1 \cap X_2 = \{0\}$, schreiben wir $X_1 \oplus X_2$ und nennen die Summe *direkt*.

Bemerkung. Sei Y ein linearer Teilraum von X . Definiere die Äquivalenzrelation \sim auf X durch $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y$. Dann wird die Menge der Äquivalenzklassen mit vertreterweiser Addition und Multiplikation auch ein \mathbb{K} -Vektorraum. Wir schreiben für diesen Vektorraum X/Y .

§ 2 Beispiele

(2.1) Beispiel. Der \mathbb{R}^n ist ein linearer Raum über dem Körper \mathbb{R} . Der \mathbb{C}^n ist sowohl ein \mathbb{C} - als auch ein \mathbb{R} -Vektorraum.

(2.2) Beispiel. Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$. Dann ist

$$C[a, b] = \{x : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}, x \text{ ist stetig}\}$$

ein \mathbb{K} -Vektorraum mit $\dim C[a, b] = \infty$. Zum Beispiel sind die Monome $(t^k)_{k \in \mathbb{N}}$ ein unendliches linear unabhängiges System, jedoch keine Basis. Tatsächlich ist jede Basis dieses Raumes überabzählbar.

§ 3 Lineare Abbildungen

(3.1) Definition. Seien X, Y lineare Räume über \mathbb{K} . $A : X \rightarrow Y$ heißt *linear*, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt:

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2).$$

$A : X \rightarrow \mathbb{K}$ heißt *lineares Funktional*. Für A linear heißt $R(A) = \text{im } A = \{A(x) : x \in X\}$ der *Bildraum* von A und $N(A) = \ker A = \{x \in X : A(x) = 0\}$ der *Kern* von A .

(3.2) Bemerkung. Sei $A : X \rightarrow Y$ linear.

- (a) Sei $M \subset X$ ein linearer Unterraum. Dann ist $A(M) \subset Y$ wieder ein linearer Unterraum und es gilt $\dim A(M) \leq \dim M$ mit Gleichheit bei Injektivität.

(b) Es gilt

$$A \text{ injektiv} \iff N(A) = \{0\}.$$

Allgemeiner ist

$$X/(N(A)) \cong \text{im } A.$$

(c) Falls $\dim X = \dim Y = n < \infty$, dann ist A genau dann injektiv, wenn A surjektiv ist.

(d) $A : X \rightarrow Y$ ist linear und bijektiv genau dann, wenn es eine lineare Umkehrabbildung $A^{-1} : Y \rightarrow X$.

(e) Falls so ein $A : X \rightarrow Y$ linear und bijektiv existiert, nennen wir X und Y *linear isomorph*. A heißt dann ein *linearer Isomorphismus*.

Nur falls $\dim X = \dim Y < \infty$ sind X und Y auch „topologisch“ isomorph. In diesem Fall erhält man die Prototypen \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n für endlich-dimensionale Vektorräume und andere gibt es nicht (die sie auch als Topologische Räume isomorph sind).

Beispiel. $X = \{x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, x, \dot{x}, \ddot{x} \text{ stetig}, x(a) = \dot{x}(a) = 0\}$ ist ein linearer Raum. Sei $Y = C[a, b]$ und $A : X \rightarrow Y$ gegeben durch

$$(Ax)(t) := \ddot{x}(t) + c_1(t)\dot{x}(t) + c_2(t)x(t), \quad t \in [a, b], c_1, c_2 \in C[a, b].$$

Dann ist A linear, weil differenzieren linear ist und A ist injektiv: Zunächst ist $x = 0$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung $Ax = 0$. Die Theorie der Differentialgleichungen sagt uns, dass diese Differentialgleichung eine eindeutige Lösung des Anfangswertsproblems ist.

A ist aber auch surjektiv: Sei $y \in Y$ gegeben, dann suchen wir $x \in X$ mit $Ax = y$. Also wollen wir eine inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung lösen. Auch diese ist nach der Theorie von gewöhnlichen Differentialgleichungen eindeutig lösbar.

Also ist A bijektiv, das heißt, es gibt eine lineare Abbildung $A^{-1} : Y \rightarrow X$. Diese Inverse ist in der Regel schlecht anzugeben. Einen einfacheren Spezialfall dazu wird in der Übung behandelt.

Beispiel. Sei $X = Y = C[a, b]$, $A : X \rightarrow X$ gegeben durch

$$(Ax)(t) := \int_a^b k(s, t)x(s)ds, \quad t \in [a, b],$$

wobei $k : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und gegeben ist. Dann ist A linear, da das Integral linear ist. Auch ist, wenn $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist, die Abbildung

$$(A_\lambda x)(t) := \lambda x(t) - (Ax)(t), \quad t \in [a, b]$$

linear. Die Probleme $Ax = y$ (bei gegebenem $y \in Y$ und gesuchtem $x \in X$) oder $A_\lambda x = 0$ (gesucht ist $\lambda \in \mathbb{R}$ und eine nichttriviale Lösung $x \in X \setminus \{0\}$) heißen Integralgleichungen erster und zweiter Ordnung.

Beispiel. Sei $X = C[a, b]$, $A : X \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$Ax = x(t_0),$$

wobei $t_0 \in [a, b]$ fest gewählt sei. Eine andere lineare Abbildung $A : X \rightarrow \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$Ax = \int_a^b x(t) dt$$

Dann sind beide Abbildungen A linear und nicht injektiv, aber surjektiv.

Beispiel. Sei $X = \ell^2$, $A : X \rightarrow X$. Für $x = (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei

$$Ax = (0, \xi_1, \xi_2, \dots) \in \ell^2.$$

A heißt (Rechts-)Shiftoperator und ist linear und injektiv, jedoch nicht surjektiv. Solche Abbildungen gibt es für $\dim X = \dim Y < \infty$ nicht.

§ 4 Duale Räume

$A : X \rightarrow \mathbb{K}$ sei ein lineares Funktional, X ein linearer Raum. Wir verwenden ein neues Symbol (statt A)

$$x' : X \rightarrow \mathbb{K} = \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases} \quad \text{linear.}$$

Wir schreiben nun

$$x'(x) =: \langle x, x' \rangle = \langle x, x' \rangle_{X \times X^f} \in \mathbb{K}.$$

Wir setzen

$$X^f := \{x' : x' \text{ ist lineares Funktional auf } X\}.$$

Hierbei sollte man nicht x' nicht mit der Ableitung von x verwechseln. Auch ist $\langle -, - \rangle_{X \times X^f}$ kein Skalarprodukt.

Der Raum X^f wird auf natürlicher Weise zum linearen Raum mit

$$(\alpha x'_1 + \beta x'_2)(x) := \alpha x'_1(x) + \beta x'_2(x), \quad x \in X, x'_1, x'_2 \in X^f, \alpha, \beta \in \mathbb{K}.$$

So ist

$$\langle -, - \rangle_{X \times X^f} : X \times X^f \rightarrow \mathbb{K}$$

bilinear.

(4.1) Definition. X^f heißt der *algebraische Dualraum* zu X . $X^{ff} := (X^f)^f$ heißt der *biduale Raum* zu X .

Beispiel. X^{ff} liefert die kanonische Abbildung

$$J : X \rightarrow X^{ff}, x \mapsto J(x) = x''$$

mit

$$\langle x', x'' \rangle := \langle x, x' \rangle \quad \forall x' \in X^f.$$

Damit ist $x'' : X^f \rightarrow \mathbb{K}$ linear wohldefiniert.

(4.2) Definition. Der lineare Raum X heißt *algebraisch reflexiv*, falls J bijektiv ist (und damit X linear isomorph zu X^{ff}) ist.

(4.3) Bemerkung. X ist genau dann algebraisch reflexiv, wenn $\dim X < \infty$ ist.

Im Fall $\dim X < \infty$ lässt sich leicht eine duale Basis angeben: Sei dazu $M := \{x_1, \dots, x_n\}$ eine Basis von X . Dann wird durch

$$\langle x_i, x'_k \rangle := \delta_{i,k}$$

und linearer Fortsetzung die Menge $M := \{x'_1, \dots, x'_n\} \subset X^f$ erklärt. Dann ist M' eine Basis von X' , die die *duale Basis* von M genannt wird. Tatsächlich ist X^f im Falle $\dim X = \infty$ wesentlich größer. Man wählt deshalb eine (neue) Definition des Dualraums:

(4.4) Definition (Dualraum). Zu einem linearen Raum X ist

$$X' := \{x' : X \rightarrow \mathbb{K}, x' \text{ linear und stetig}\} \subset X^f$$

der Dualraum von X .

Um Allerdings von Stetigkeit reden zu können, müssen wir zunächst *Topologien* einführen.

Kapitel 2

Topologie

§ 1 Topologische Räume

(1.1) Definition. Sei X eine Menge und $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Menge von Teilmengen von X . \mathcal{T} heißt eine *Topologie* auf X , falls \mathcal{T} unter endlichen Durchschnitten und beliebigen Vereinigungen abgeschlossen ist. Insbesondere muss \mathcal{T} \emptyset als leere Vereinigung und X als leeren Schnitt enthalten. (X, \mathcal{T}) heißt dann *topologischer Raum*. Die Elemente von \mathcal{T} heißen *offene Mengen*.

(1.2) Beispiele. (a) Für alle Mengen X ist $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ eine Topologie auf X , die sogenannte *indiskrete Topologie*, *gröbste Topologie* oder auch *Klumpentopologie*.

(b) Für alle Mengen X ist $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ eine Topologie, die sogenannte *diskrete Topologie* oder *feinste Topologie* auf X .

(c) In Analysis I wird eine Menge $U \subset \mathbb{R}$ für offen erklärt, wenn es zu jedem $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \varepsilon$ auch $y \in U$ gilt. Aus der Analysis ist bekannt, dass die so definierten offenen Mengen den Axiomen genügen. Diese Topologie \mathcal{T}_{nat} wird *natürliche Topologie* genannt.

(d) Sei X eine beliebige Menge. Die *cofinite Topologie* auf X wird definiert als

$$\mathcal{T}_{\text{cof}} = \{Y \subset X : Y = \emptyset \text{ oder } \complement_X Y \text{ ist endlich}\}$$

(e) Der *Sierpinski-Raum* ist die Menge $\{0, 1\}$ versehen mit der Topologie $\{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$.

(1.3) Definition. Sei $M \subset X$.

(a) M heißt *abgeschlossen*, wenn $X \setminus M$ offen ist.

(b) $U \subset X$ heißt *Umgebung* von A , wenn es eine offene Menge V gibt mit $A \subset V \subset U$. Wir setzen

$$\mathcal{U}_A := \mathcal{U}_A(\mathcal{T}) := \{U \subset X : U \text{ Umgebung von } A\}.$$

\mathcal{U}_A heißt *Umgebungssystem* oder *Umgebungsfilter* von $A \subset X$. Für $x \in X$ setzen wir $\mathcal{U}_x := \mathcal{U}_{\{x\}}$. x heißt dann *innerer Punkt* von U für alle $U \in \mathcal{U}_x$.

- (c) $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* von M , falls jede Umgebung von x_0 ein $y \in M$ enthält mit $y \neq x$.
- (d) Das *Innere* von M ist

$$M^\circ := \bigcup \{U \in \mathcal{T} : U \subset M\}$$

die größte offene Menge, die in M enthalten ist.

- (e) Der *Abschluss* von M ist

$$\overline{M} := \bigcap \{U \subset M : U \text{ abgeschlossen}\}$$

die kleinste abgeschlossene Menge, die M enthält.

- (f) M heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung von M eine endliche Teilüberdeckung besitzt.
- (g) M heißt *dicht*, falls $\overline{M} = X$.
- (h) M heißt *nirgends dicht*, falls $(\overline{M})^\circ = \emptyset$.

(1.4) Bemerkung. (a) $M^\circ \subset M \subset \overline{M}$.

(b) M° ist die Menge der inneren Punkte von M .

(c) M ist genau dann abgeschlossen, wenn $M = \overline{M}$.

(1.5) Definition (Hausdorff-Raum). Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ existieren $U \in \mathcal{U}_x, V \in \mathcal{U}_y$ mit $U \cap V = \emptyset$. Dann heißt (X, \mathcal{T}) Hausdorff-Raum bzw. genügt dem Trennungssaxiom.

(1.6) Definition (Konvergenz). Eine Folge $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ heißt konvergent gegen $x_0 \in X$, falls zu jeder Umgebung $U \in \mathcal{U}_{x_0}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$.

(1.7) Bemerkung. Man überlegt sich leicht, dass der Grenzwert x_0 in der Regel nicht eindeutig ist. Bsp: In $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$ konvergiert jede Folge gegen jeden Punkt. Ist (X, \mathcal{T}) jedoch ein Hausdorff-Raum, so ist jeder Grenzwert eindeutig.

Beweis. Seien $x_0 \neq x'_0$ Grenzwerte von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$. Dann existieren disjunkte Umgebungen $U, U' \in \mathcal{U}_{x_0}$. Weiterhin gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$ und $n'_0 \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \in U'$ für alle $n \geq n'_0$. Also gilt $x_{\max\{n_0, n'_0\}} \in U \cap U'$. Das ist ein Widerspruch zur Disjunktheit der Umgebungen. ■

(1.8) Definition (Häufungspunkt). $x_0 \in X$ heißt Häufungspunkt von $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, falls zu jeder Umgebung $U \in \mathcal{U}_{x_0}$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $n \geq k \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $x_n \in U$.

(1.9) Beispiel. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit natürlicher Topologie. $x_n = (-1)^n$ hat zwei HP ± 1 . Achtung: $M = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} = \{-1, 1\}$ hat als Menge keine HP.

(1.10) Bemerkung. Für die indiskrete Topologie ist jeder Punkt in X HP jeder Folge.

(1.11) Definition (Stetigkeit). $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ heißt stetig, falls für alle $V \in \mathcal{T}_Y$ gilt, dass $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

(1.12) Bemerkung. f ist stetig $\iff f$ ist stetig in jedem Punkt

(1.13) Definition (Homöomorphismus). Ist $f : (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ bijektiv und stetig, und $f^{-1} : (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{T}_X)$ auch stetig, dann heißt f Homöomorphismus. X und Y heißen homöomorph, falls so ein Homöomorphismus existiert.

(1.14) Definition (Basis von Topologien und Umgebungen). (a) Eine Familie $B \subset \mathcal{T}$ heißt Basis der Topologie in (X, \mathcal{T}) , falls $T = \cup M : M \subset B$.

(b) Eine Familie $B \subset \mathcal{U}_x$ von $x \in X$ heißt Umgebungsbasis des Punktes x , falls für alle $U \in \mathcal{T}$, $x \in U$ existiert ein $V \in B$ mit $x \in V \subset U$.

(1.15) Beispiel. Für die natürliche Topologie auf \mathbb{R}^n ist eine Basis der Topologie gegeben durch $B_\varepsilon(x) : x \in \mathbb{R}^n, \varepsilon > 0$ mit den offenen Kugeln $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < \varepsilon\}$. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ fest. Dann ist $B_{1/n}(x) : n \in \mathbb{N}$ eine abzählbare Umgebungsbasis von x .

(1.16) Definition (Relativtopologie oder Spurtopologie). $M \subset \mathcal{T}$ eines topologischen Raumes (X, \mathcal{T}) lässt sich in natürlicher Weise zu einem topologischen Raum machen, nämlich mit $\mathcal{T}' := \{M \cap V : V \in \mathcal{T}\}$.

(1.17) Bemerkung. $M = M \cap X \in \mathcal{T}'$ da $X \in \mathcal{T}$, d.h. M ist offen in der Spurtopologie. Achtung: M muss nicht offen in X sein.

(1.18) Definition. Seien zwei Topologien $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ auf X gegeben. Wir sagen \mathcal{T}_1 ist feiner als \mathcal{T}_2 , falls $\mathcal{T}_1 \supset \mathcal{T}_2$. Wir sagen \mathcal{T}_1 ist gröber als \mathcal{T}_2 , falls $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$. Wir sagen die Topologien sind gleich, falls $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

(1.19) Bemerkung. Sei \mathcal{T}_1 feiner als \mathcal{T}_2 . Die feinere Topologie \mathcal{T}_1 enthält mehr offene Mengen, und damit zu jedem Grenzwert x_0 weniger konvergente Folgen.

Man zeigt leicht: \mathcal{T}_1 ist feiner als $\mathcal{T}_2 \iff$ Für alle $x \in X$ gilt: Seien $B_1 \subset \mathcal{T}_1, B_2 \subset \mathcal{T}_2$ Umgebungsbasen von x , dann gilt für alle $U \in B_1$, dass ein $V \in B_2$ existiert mit $V \subset U$.

(1.20) Beispiel. Folgende Topologien auf \mathbb{R}^n sind gleich. \mathcal{T}_1 sei die Topologie, die durch die Kugeln $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < \varepsilon\}$ erzeugt wird. \mathcal{T}_2 sei die Topologie, die durch die Quader $B_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \leq i \leq n} |y_i - x_i| < \varepsilon\}$ erzeugt wird.

(1.21) Definition (Produkttopologie). Seien $(X, \mathcal{T}_X), (Y, \mathcal{T}_Y)$ topologische Räume. Dann ist die Familie von Mengen $\{U_X \times U_Y : U_X \in \mathcal{T}_X, U_Y \in \mathcal{T}_Y\} \subset 2^{X \times Y}$ eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_{X \times Y}$ im kartesischen Produkt $X \times Y$. Bemerkung: Es genügt auch wenn U_X, U_Y über Basen von $\mathcal{T}_X, \mathcal{T}_Y$ genommen werden.

§ 2 Metrische Räume

(2.1) Lemma (Eigenschaften metrischer Räume). Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Jeder Punkt $x \in X$ besitzt eine abzählbare Umgebungsbasis

$$\{B_{1/n}(x), n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d(x, x_n) = 0.$$

(c) Es ist $x_0 \in M$ genau dann ein innerer Punkt von $M \subset X$, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $B_\varepsilon(x_0) \subset M$.

(d) M ist nirgends dicht in X genau dann, wenn es zu jeder Kugel $B_\varepsilon(x_0)$ mit $x_0 \in X, \varepsilon > 0$ eine Kugel $B_\delta(x_1) \subset B_\varepsilon(x_0)$ mit $B_\delta(x_1) \cap M = \emptyset$ gibt.

(e) Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Dann ist auch $(X \times Y, d_{X \times Y})$ ein metrischer Raum vermöge der Metrik

$$d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\}$$

oder auch mit

$$d_{X \times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \sqrt{d_X^2(x_1, x_2) + d_Y^2(y_1, y_2)}.$$

Tatsächlich induzieren diese beiden Metriken die gleiche Topologie (nämlich die Produkttopologie)

(f) Homöomorphismen $f : X \rightarrow Y$ (für metrische Räume X, Y), die die Metrik respektieren, das heißt

$$d_X(x_1, x_2) = d_Y(f(x_1), f(x_2)) \quad \forall x_1, x_2 \in X$$

heißen Isometrien.

(g) Ein metrischer Raum muss im allgemeinen keine lineare Struktur haben. Man betrachte hierzu die Menge $X := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit der diskreten Metrik. Diese kann keine Vektorraumstruktur haben, da $|X| = 6$ keine Primzahlpotenz ist.

Beweis. Der Beweis wird aufgrund seiner Trivialität den Lesern zur Übung überlassen, da er wirklich nur Einsetzen der Definitionen ist. ■

Nun ein paar Charakterisierungen von kompakten Mengen in metrischen Räumen.

(2.2) Satz. Im metrischen Raum (X, d) sind äquivalent:

(a) $K \subset X$ ist kompakt (überdeckungskompakt)

(b) Jede Folge in K besitzt mindestens einen Häufungspunkt in K (abzählbar kom-

pakt)

(c) Jede Folge in K besitzt eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K (folgenkompakt)

(2.3) Bemerkung. Der Satz gilt so im allgemeinen Hausdorff-Raum *nicht*. Für „(b) \Rightarrow (a)“ benötigt man zusätzlich das zweite Abzählbarkeitsaxiom, also die Existenz einer abzählbaren Basis der Topologie. Für „(b) \Rightarrow (c)“ benötigt man das erste Abzählbarkeitsaxiom, also die Existenz von abzählbaren Umgebungsbasen für jeden Punkt.

§ 3 Vollständigkeit in metrischen Räumen und der Satz von Baire

(3.1) Definition. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ in (X, d) heißt *Cauchy-Folge*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ existiert mit $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$.

(3.2) Lemma. Jede Konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ ist auch eine Cauchy-Folge.

(3.3) Definition. Der metrische Raum (X, d) heißt *vollständig*, falls jede Cauchy-Folge in (X, d) konvergiert.

Nicht jeder metrische Raum braucht vollständig zu sein (man betrachte hierfür z.B. \mathbb{Q} und die Folge der Partialsummen der Dezimalbruchentwicklung von $\sqrt{2}$), jedoch lässt sich jeder metrische Raum zu einem vollständigen erweitern.

(3.4) Satz. Jeder metrische Raum (X, d) lässt sich in einen bis auf Isometrie eindeutig bestimmten kleinsten vollständigen metrischen Raum (\tilde{X}, \tilde{d}) einbetten. Dieser Raum (\tilde{X}, \tilde{d}) heißt die *Vervollständigung* von (X, d) .

Beweis. Zwei Cauchyfolgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien äquivalent, falls $d(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Hierdurch ist eine Äquivalenzrelation definiert. Sei $[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ die vom Repräsentanten $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erzeugte Klasse. Man setzt

$$\tilde{X} := \{[(x_n)_{n \in \mathbb{N}}] : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Cauchy-Folge in } (X, d)\}$$

und

$$\tilde{d}([(x_n)_{n \in \mathbb{N}}], [(y_n)_{n \in \mathbb{N}}]) := \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n).$$

Dann ist $(d(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} , da

$$|d(x_n, x_m) - d(y_m, y_n)| \leq \underbrace{d(x_n, x_m)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{d(y_n, y_m)}_{\rightarrow 0}.$$

Da \mathbb{R} bekanntlich vollständig ist, existiert somit der Grenzwert. Ferner ist \tilde{d} Repräsentatenu-nabhängig, also wohldefiniert: Seien (\tilde{x}_n) und (\tilde{y}_n) andere Repräsentaten. Dann ist

$$d(x_n, y_n) \leq \underbrace{d(x_n, \tilde{x}_n)}_{\rightarrow 0} + d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) + \underbrace{d(\tilde{y}_n, y_n)}_{\rightarrow 0}.$$

Die umgekehrte Ungleichung ergibt sich aus Vertauschung der Rollen. Man rechnet leicht nach, dass (\tilde{X}, \tilde{d}) ein vollständiger metrischer Raum ist. Wir können (X, d) durch die entsprechenden konstanten Folgen isometrisch in \tilde{X} einbetten. ■

Bemerkung. Wendet man diese Technik auf \mathbb{Q} mit der natürlichen Metrik an, dann erhält man (\mathbb{R}, d) als vollständige Hülle.

(3.5) Satz (Schachtelsatz). Sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ und $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ Folgen mit der Eigenschaft

$$(a) \quad \overline{B}_{r_{n+1}}(x_{n+1}) \subset B_{r_n}(x_n)$$

$$(b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0.$$

Dann gibt es genau ein $x_0 \in X$ mit $x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}_{r_n}(x_n)$.

Beweis. Für $p \in \mathbb{N}$ beliebig gilt

$$\overline{B}_{r_{n+p}}(x_{n+p}) \subset \overline{B}_{r_n}(x_n).$$

Also

$$d(x_{n+p}, x_n) \leq r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Damit ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und damit konvergiert gegen ein $x_0 \in X$. Außerdem gilt

$$d(x_p, x_n) \leq \underbrace{d(x_0, x_{n+p})}_{\rightarrow 0 (p \rightarrow \infty)} + \underbrace{d(x_{n+p}, x_n)}_{\leq r_n}.$$

Damit folgt für $p \rightarrow \infty$

$$d(x_0, x_n) \leq r_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

also $x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}_{r_n}(x_n)$. Für die Eindeutigkeit sei \tilde{x}_0 ebenfalls in $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}_{r_n}(x_n)$. Dann folgt

$$d(x_0, \tilde{x}_0) \leq \underbrace{d(x_0, x_n)}_{\leq r_n} + \underbrace{d(x_n, \tilde{x}_0)}_{\leq r_n} \leq 2r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Doch damit war bereits $x_0 = \tilde{x}_0$. ■

(3.6) Definition. Eine Teilmenge M eines metrischen Raumes (X, d) heißt *von erster Kategorie* oder *mager*, falls sie die Vereinigung abzählbar vieler in X nirgends dichter Mengen ist. Andernfalls heißt M *von zweiter Kategorie*.

Der folgende Satz wird beim Beweis mehrerer fundamentaler Sätze benötigt, z.B. beim Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit oder dem Open-Mapping-Theorem.

(3.7) Satz (Baire). *Jede nichtleere offene Menge eines vollständigen metrischen Raumes (X, d) ist von zweiter Kategorie (insbesondere X selbst)*

Beweis. Sei $\emptyset \neq M \subset X$ offen. Wir nehmen umgekehrt an, M wäre von erster Kategorie, das heißt

$$M \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$$

mit $M_n \subset X$ nirgends dicht. Wähle $x_0 \in M$. Da M offen ist, gibt es ein $r = r_0 > 0$ mit $B_{r_0}(x_0) \subset M$. Da M_1 nirgends dicht ist, gibt es $r_1 > 0$ und $x_1 \in X$ mit

$$B_{r_1}(x_1) \subset B_{r_0/2}(x_0)$$

und $B_{r_1}(x_1) \cap M_1 = \emptyset$. Analog finden wir, da M_2 nirgends dicht ist, $r_2 > 0$ und $x_2 \in X$ mit

$$B_{r_2}(x_2) \subset B_{r_1/2}(x_1)$$

und $B_{r_2}(x_2) \cap M_2 = \emptyset$. Durch Fortsetzen dieses Schemas finden wir eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ und Radien $(r_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$ mit $r_n \leq r/2^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 3.5 erfüllt. Folglich existiert genau ein

$$\tilde{x} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{r_n}(x_n) \subset B_r(x_0) \subset M.$$

Aber $\tilde{x} \notin M_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist auch \tilde{x} nicht in $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = M$. Das ist ein Widerspruch. Also ist M von zweiter Kategorie. ■

Kapitel 3

Topologische lineare Räume

Erklärtes Ziel dieses Kapitels wird sein, die beiden Strukturen aus den vorherigen beiden Kapiteln, also die Topologie und den linearen Raum zusammenzuführen.

(0.1) Definition. Ein linearer Raum X über dem Körper \mathbb{K} mit Topologie \mathcal{T} heißt *topologischer linearer Raum*, falls die Vektorraumoperationen $(+ : X \times X \rightarrow X$ und $\cdot : \mathbb{K} \times X \rightarrow X)$ stetig sind.

Bemerkung. Stetigkeit der Vektorraumoperationen sollte als minimales Kompatibilitätskriterium der beiden Strukturen gefordert werden. Tatsächlich ist es im Allgemeinen gar nicht erfüllt. Erst im normierten Raum bekommt man diese Stetigkeit geschenkt.

§ 1 Normierte Räume

(1.1) Definition. Sei X ein linearer Raum über \mathbb{K} . Die Abbildung $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$ heißt *Norm* auf X , falls für alle $x, y \in X, \alpha \in K$ gilt:

- (a) $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- (b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- (c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$(X, \|\cdot\|)$ heißt dann *normierter Raum*.

(1.2) Bemerkung. Durch $d(x, y) := \|x - y\|$ wird ein normierter Raum auch ein metrischer, also insbesondere auch ein topologischer Raum. Diese induzierte Topologie auf $(X, \|\cdot\|)$ heißt *Normtopologie*.

Ohne die lineare Struktur macht der normierte Raum gar keinen Sinn, da für die Definition einiger der Normaxiome die Vektorraumoperationen verwendet werden.

(1.3) Beispiele. (a) Betrachte den \mathbb{R}^n mit $\|x\|_p := (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ mit $1 \leq p < \infty$ ist ein normierter Raum, genauso wie mit $\|x\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Insbesondere gibt es im \mathbb{R}^n überabzählbar viele verschiedene Normen. Wir werden jedoch später sehen, dass diese Normen alle die gleiche Topologie erzeugen.

- (b) Der Raum aller stetigen Funktionen auf einem kompaktem Intervall $C[a, b]$ mit $\|x\|_\infty := \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$ ist ein normierter Raum. Außerdem wird durch

$$\|x\| := \int_a^b |x(t)| dt$$

ebenfalls eine Norm definiert.

- (c) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann wird $C(\overline{\Omega})$ mit

$$\|x\|_\infty := \max_{t \in \overline{\Omega}} |x(t)|$$

auch zu einem normierten Raum.

- (d) $L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega)/\mathcal{N}$, wobei $\mathcal{N} = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = 0 \text{ fast überall}\}$ ist mit

$$\|x\| := \left(\int_\Omega |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

ein normierter Raum, wobei $1 \leq p < \infty$.

- (e) ℓ^p mit

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

ist ebenfalls ein normierter Raum, wobei $1 \leq p < \infty$.

(1.4) Lemma. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann sind die Abbildungen $+$, \cdot und $\|\cdot\|$ stetig.

Beweis. Für beliebige Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X, (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\lim x_n = x, \lim y_n = y, \lim \alpha_n = \alpha$ gelten

$$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$$

sowie

$$\|\alpha_n x_n - \alpha x\| \leq |\alpha_n| \|x_n - x\| + \|x\| |\alpha_n - \alpha|$$

und

$$|\|x_n\| - \|x\|| \leq \|x_n - x\|$$

nach der umgekehrten Dreiecksungleichung. Folglich sind die zu betrachtenden Abbildungen alle folgenstetig, und, da metrische Räume stets dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügen, auch stetig. ■

(1.5) Korollar. *Jeder normierte Raum versehen mit der Normtopologie ist ein topologischer linearer Raum. Deshalb ist auch keine Unterscheidung zwischen normierten Räumen und normierten linearen Räumen nötig.*

§ 2 Topologische lineare Räume

Bemerkung. Hierbei sei stetig die Topologie von $X \times X$ die Produkttopologie, bei den Körpern

$\mathbb{K} = \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \end{cases}$ die übliche Topologie. Wir schreiben im Folgenden für Mengen $M, M_1, M_2 \subset X$

und $\alpha \in \mathbb{K}$ nun

$$M_1 + M_2 := s(M_1, M_2) := \{x + y : x \in M_1, y \in M_2\},$$

$$A \cdot M := m(A, M) := \{\alpha x : \alpha \in A, x \in M\}.$$

(2.1) Lemma. *Hat der topologische Raum (X, \mathcal{T}) auch eine lineare Struktur, so sind äquivalent:*

- (a) *Die Addition s ist stetig.*
- (b) *Für beliebiges $x, y \in X$ gilt: Zu jeder Umgebung $O_{x+y} \in \mathcal{T}$ existieren Umgebungen $O_x \in \mathcal{T}$ von x und $O_y \in \mathcal{T}$ von y mit $O_x + O_y \subset O_{x+y}$*

Beweis. s ist stetig in (x, y) genau dann, wenn zu jeder Umgebung $O_{x,y} \in \mathcal{T}_X$ von (x, y) existiert eine Umgebung $U \subset \mathcal{T}_{X \times X}$ von (x, y) mit $s(U) \subset O_{x+y}$. Nach Definition der Produkttopologie existieren dann Umgebungen $O_x \in \mathcal{U}_x$ und $O_y \in \mathcal{U}_y$ mit $O_x \times O_y \subset U$. Damit ist

$$O_x + O_y = s(O_x, O_y) = s(O_x \times O_y) \subset s(U) \subset O_{x+y}.$$

Analog zeigt man die entsprechende Aussage für die skalare Multiplikation: ■

(2.2) Lemma. *Hat der topologische Raum (X, \mathcal{T}) auch eine lineare Struktur, so sind äquivalent:*

- (a) *Die Addition m ist stetig.*
- (b) *Für beliebiges $\alpha \in \mathbb{K}, x \in X$ gilt: Zu jeder Umgebung $O_{\alpha x} \in \mathcal{T}$ existieren Umgebungen $O_x \in \mathcal{T}$ von x und $O_\alpha \in \mathcal{T}$ von α mit $O_\alpha \times O_x \subset O_{\alpha x}$.*

Betrachtet man insbesondere die Stetigkeit am Punkte $\alpha = 0$ und $x \in X$ beliebig, dann gilt also: Für jede Umgebung $O_0 \in \mathcal{U}_0 \subset X$ existiert eine Umgebung $O_x \in \mathcal{U}_x$ und ein $r > 0$, so dass

$$\forall \beta : |\beta| < r : \beta O_x \subset O_0.$$

Unmittelbar daraus erhalten wir folgendes Korollar:

(2.3) Korollar. Im topologischen Raum (X, \mathcal{T}) gilt für $x \in X$ beliebig und $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$

$$\beta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies \beta_n x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Definition. (a) Zu $x_0 \in X$ fest definieren wir den Translationsoperator

$$T_{x_0} := X \rightarrow X, x \mapsto x + x_0.$$

(b) Zu $\alpha_0 \in \mathbb{K}^*$ fest definieren wir den Multiplikationsoperator

$$M_{\alpha_0} := X \rightarrow X, x \mapsto \alpha_0 \cdot x.$$

(2.4) Lemma. Die Translationsoperatoren und Multiplikationsoperatoren sind Homöomorphismen.

Beweis. Das ist klar. ■

(2.5) Korollar (Invarianzprinzip). Im topologischen linearen Raum (X, \mathcal{T}) ist die Topologie bereits durch die offenen Umgebungen von $0 \in X$ bestimmt. Alle anderen offenen Mengen entstehen durch Translation.

Beweis. Das ist klar. ■

§ 3 Metrische lineare Räume und Quasi-normierte Räume

(3.1) Definition. Eine Metrik $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem linearen Raum X heißt *translationsinvariant*, falls gilt:

$$\forall x, y, z \in X : d(x, y) = d(x + z, y + z),$$

oder äquivalent dazu:

$$\forall x, y \in X : d(x, y) = d(x - y, 0).$$

Bemerkung. Ohne lineare Struktur macht das gar keinen Sinn!

(3.2) Definition. Ein metrischer Raum (X, d) mit linearer Struktur und translationsinvarianter Metrik d heißt *metrischer linearer Raum*, falls die Vektorraumoperationen stetig sind (in der von der Metrik induzierten Topologie).

(3.3) Lemma. *Im metrischen Raum (X, d) mit linearer Struktur und translationsinvarianter metrik, dann ist die Addition immer stetig.*

Beweis. Es genügt, da in metrischen Räumen Folgenstetigkeit und Stetigkeit äquivalent sind, zu zeigen, dass $\lim d(x_n + y_n, x + y) = 0$, sofern $\lim d(x_n, x) = 0$ und $\lim d(y_n, y) = 0$. Dazu ist

$$d(x_n + y_n, x + y) \leq d(x_n + y_n) + d(x + y_n, x + y) = d(x_n, x) + d(y_n, y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad \blacksquare$$

Beispiel. Sei $X = C(a, b)$ mit der Metrik

$$d(x, y) := \min\{1, \sum_{t \in (a, b)} |x(t) - y(t)|\}.$$

Dann ist d eine translationsinvariante Metrik, aber X ist kein linearer Raum, da die Skalarmultiplikation nicht stetig ist.

Für die Stetigkeit der skalaren Multiplikation im Punkt $(\alpha, x) \in \mathbb{K} \times X$ hat man (nach dem $\varepsilon - \delta - \text{Kriterium}$)

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \exists r > 0 \forall \beta \in \mathbb{K} \forall y \in X : \left. \begin{array}{l} |\beta - \alpha| < r \\ d(x, y) < \delta \end{array} \right\} \implies d(\beta y, \alpha x) < \varepsilon$$

(3.4) Lemma. *Sei (X, d) ein metrischer Raum mit linearer Struktur und mit einer translationinvarianten Metrik. Dann ist X mit der von d erzeugten Topologie ein metrischer linearer Raum genau dann, wenn für alle $\alpha \in \mathbb{K}, x \in X$ und beliebige Nullfolgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X, (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ gilt*

$$\alpha x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\alpha x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\alpha_n x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Beweis. „ \implies “: Skalare Multiplikation ist im metrischen linearen Raum stetig, also folgen die Aussagen sofort.

„ \impliedby “: Wegen der Äquivalenz von Stetigkeit und Folgenstetigkeit ist zu zeigen

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha \in \mathbb{K} \\ x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in X \end{array} \right\} \implies \alpha_n x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha x.$$

Sei dazu $z_n := x_n - x \in X$, $\gamma_n := \alpha_n - \alpha \in \mathbb{K}$. Dann ist

$$\gamma_n z_n + \gamma_n x + \alpha z_n = (\alpha_n - \alpha)(x_n - x) + (\alpha_n - \alpha)x + \alpha(x_n - x) = \alpha_n x_n - \alpha x.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} d(\alpha_n x_n, \alpha x) &= d(\alpha_n x_n - \alpha x, 0) = d(\gamma_n z_n + \gamma_n x + \alpha z_n, 0) \\ &\leq \underbrace{d(\gamma_n z_n, 0)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{d(\gamma_n x, 0)}_{\rightarrow 0} + \underbrace{d(\alpha z_n, 0)}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Da die Addition ohnehin immer stetig ist, sind wir fertig. ■

(3.5) Definition. Eine Abbildung $|\cdot| : X \rightarrow [0, \infty)$ heißt *Quasi-Norm* auf dem Linearen Raum X , falls gilt:

(Q1) $|x| \geq 0$ für alle $x \in X$ und $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$.

(Q2) $|-x| = |x|$ für alle $x \in X$

(Q3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ für alle $x, y \in X$

(Q4) $|\alpha x_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ für $\alpha \in \mathbb{K}$, falls $|x_n| \rightarrow 0$

(Q5) $|\alpha_n x| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ für $x \in X$, falls $|\alpha_n| \rightarrow 0$

(Q6) $|\alpha_n x_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ falls $|x_n| \rightarrow 0$ und $|\alpha_n x_n| \rightarrow 0$

$(X, |\cdot|)$ heißt dann *quasi-normierter Raum*.

(3.6) Bemerkung. Jeder normierte Raum ist auch ein quasi-normierter Raum.

(3.7) Satz. (a) Ist $|\cdot|$ eine Quasi-Norm auf X , so wird durch $d(x, y) := |x - y|$ eine translationsinvariante Metrik definiert, welche X zu einem metrischen linearen Raum macht.

(b) Ist (X, d) ein metrischer linearer Raum mit translationsinvarianter Metrik d , so ist $(X, |\cdot|)$ mit $|x| := d(x, 0)$ ein quasi-normierter Raum.

Beweis. Das folgt direkt aus den Axiomen und Lemma 3.4. ■

Speziell für die Anwendung sehr wichtige metrische lineare Räume werden von Semi-Normen erzeugt.

(3.8) Definition. Sei X ein linearer Raum. Eine Abbildung $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Semi-Norm* oder *Halbnorm*, falls folgendes gilt:

(S1) $\forall x \in X : p(x) \geq 0$

(S2) $\forall x \in X, \alpha \in \mathbb{K} : p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$

$$(S3) \quad \forall x, y \in X : p(x + y) \leq p(x) + p(y)$$

(X, p) heißt dann *semi-normierter* Raum.

Beispiel. $\mathcal{L}^p(\Omega)$ ist ein semi-normierter Raum.

Bemerkung. Jeeder semi-normierte Raum (X, p) erzeugt einen normierten Raum $(X/N, p)$, wobei $N = \{x \in X : p(x) = 0\}$ ein linearer Unterraum ist.

(3.9) Satz. Es seien $p_n : X \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ abzählbar viele Semi-Normen auf einem linearen Raum mit der Eigenschaft

$$p_n(x) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \implies x = 0. \quad (3.1)$$

Dann ist

$$d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x - y)}{1 + p_n(x - y)}$$

eine translationsinvariante Metrik auf X , welche X zum metrischen linearen Raum macht.

(3.10) Bemerkung. $p_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ sind auf (X, d) stetig. Das folgt aus (für $x_i \rightarrow x_0$ in X)

$$|p_n(x_i) - p_n(x_0)| \leq p_n(x_i - x_0) \rightarrow 0$$

und einer Übungsaufgabe.

(3.11) Satz. Sei (X, d) der in Satz 3.9 gegebene metrische lineare Raum (mit der von der Metrik erzeugten Topologie). Dann bilden die Mengen $(\varepsilon_n > 0)$

$$U(p_n, \varepsilon_n) := \bigcup B_{\varepsilon_n}^{p_n}(0) = \{x \in X : p_n(x) < \varepsilon_n\}$$

und deren endliche Durchschnitte eine Umgebungsbasis von $0 \in X$

Bemerkung. Nach dem Invarianzprinzip ist damit durch $\bigcup B_{\varepsilon_n}^{p_n}$ die ganze Topologie bestimmt. Mit anderen Worten: Die Topologie welche über die Metrik bestimmt ist, ist dieselbe wie die, welche von den $U(p_n, \varepsilon_n)$ und endlichen Schnitten davon erzeugt wird.

Beweis (Satz 3.11). Zunächst ist $U(p_n, \varepsilon_n) \in \mathcal{T}$: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon_n > 0$ fest und $y \in U(p_n, \varepsilon_n)$ beliebig gegeben. Dann ist $p_n(y) < \varepsilon_n$. Dann wähle $\rho = \rho(y) > 0$, so dass $p_n(y) + \rho < \varepsilon_n$. Dann gilt für $r := 2^{-n} \frac{\rho}{1+\rho} > 0$:

$$x \in B_r(y) \implies p_n(x + r) < \rho.$$

Dazu ist

$$\frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)} \leq 2^n \underbrace{d(x,y)}_{<r} < 2^n r = \frac{\rho}{1+\rho},$$

also $p_n(x-y) < \rho$. Mit diesem r gilt $B_r(y) \subset U(p_n, \varepsilon_n)$: Sei $x \in B_r(y)$. Dann gilt

$$p_n(x) \leq \underbrace{p_n(x-y) + p_n(y)}_{<\rho} < p_n(y) + \rho = \varepsilon_n$$

wie gewünscht.

Sei $B_r(0)$, $r > 0$ gegeben. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-n} < \frac{r}{2}.$$

mit $\varepsilon := \frac{r}{2}$ gilt dann

$$\bigcap_{n=1}^{n_0} U(p_n, \varepsilon) \subset B_r(0).$$

Sei dazu $x \in \bigcap_{n=1}^{n_0} U(p_n, \varepsilon)$ beliebig. Dann ist

$$d(x, 0) \leq \sum_{n=1}^{n_0} 2^{-n} \frac{p_n(x)}{1+p_n(x)} + \sum_{n=n_0}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon \sum_{n=1}^{n_0} 2^{-n} + \frac{r}{2} < \varepsilon + \frac{r}{2} = r,$$

somit also $x \in B_r(0)$. ■

(3.12) Bemerkung. Die Mengen $U(p_n, \varepsilon_n)$ und deren endlichen Schnitte sind konvexe Mengen, das heißt

$$x, y \in U(p_n, \varepsilon_n), \alpha \in [0, 1] \implies \alpha x + (1 - \alpha)y \in U(p_n, \varepsilon_n)$$

Beweis. Es ist

$$p_n(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \underbrace{|\alpha| p_n(x)}_{<\varepsilon_n} + \underbrace{|1 - \alpha| p_n(y)}_{<\varepsilon_n} = \varepsilon_n. \quad \blacksquare$$

Also besitzt der in Satz 3.9 gewonnene metrische lineare Raum (X, d) eine Umgebungsbasis von 0, die nur aus konvexen elementen besteht.

(3.13) Definition. Ein topologischer linearer Raum (X, \mathcal{T}) , in dem jedes $x \in X$ eine Umgebungsbasis besitzt, die nur aus konvexen Mengen besteht, heißt *lokalkonvex*.

(3.14) Satz. Sei X ein linearer Raum mit Semi-Normen $p_i, i \in I$, wobei I eine beliebige Indexmenge ist, mit der Eigenschaft

$$p_i(x) = 0 \text{ für alle } i \in I \implies x = 0.$$

Dann sind die Mengen

$$U(p_i, \varepsilon_i) = \{x \in X : p_i(x) < \varepsilon_i\}, \quad \varepsilon_i > 0, i \in I$$

und deren endliche Schnitte eine konvexe Umgebungsbasis von $0 \in X$. Die dadurch gewonnene Topologie \mathcal{T} macht X zu einem lokalkonvexen Hausdorff-Raum.

§ 4 Beispiele

Wir werden die unten angegebenen Beispiele auch gleich auf Vollständigkeit untersuchen.

(4.1) Definition. (a) Ein metrischer linearer Raum (X, d) der vollständig ist, heißt *Fréchet-Raum*.

(b) Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$, der vollständig ist, heißt *Banach-Raum*.

Beispiel (ℓ^p -Räume). (a) $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < \infty$ ist normierter Raum mit

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$

(b) $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty)$, ist normierter Raum mit $\|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$.

(c) $(\ell^p, |\cdot|_p = \|\cdot\|_p^p)$, $0 \leq p < 1$ ist quasi-normierter Raum.

(4.2) Bemerkung. Für $0 < p < q \leq \infty$ gilt $\ell^p \subset \ell^q \subset \ell^\infty$.

Beweis. Sei $x \in \ell^p$ mit $|x| = 1 = \sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^p$. Dann ist für alle $i \in \mathbb{N}$ $|x_i|^p \leq 1$, also auch $|x_i| < 1$. Dann folgt auch $\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^q < 1$, also $x \in \ell^q$ und $\sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| \leq 1$, also $x \in \ell^\infty$. ■

(4.3) Satz. Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ ein Banachraum. Für $0 < p < \infty$ ist $(\ell^p, |\cdot|_p)$ ein Fréchet-Raum.

Beweis. Nur für $1 \leq p < \infty$. Sei dazu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \ell^p$ eine Cauchy-Folge, also $x_n = (\xi_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ und für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0 mit

$$\forall n, m > n_0 : \|x_n - x_m\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^n - \xi_k^m|^p \right)^{1/p} < \varepsilon.$$

Sei $k_0 \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann ist $(\xi_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{K} , besitzt also einen Grenzwert ξ_{k_0} . Setze nun $x := (\xi_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\infty = s$. Wir vermuten x als Grenzwert unserer Cauchy-Folge. Also müssen wir zeigen, dass $x \in \ell^p$, und dass unsere Folge tatsächlich gegen x konvergiert.

Es gilt

$$\|x_n\|_1 \leq \underbrace{\|x_n - x_{n_0}\|}_{< \varepsilon} + \|x_{n_0}\| \quad \forall n \geq n_0$$

Deshalb existiert ein $M > 0$ mit $\|x_n\|_p < M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$\sum_{k=1}^N |\xi_k^n|^p < \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^n|^p \leq M^p < \infty.$$

Also haben wir

$$\sum_{k=1}^N |\xi_k^p| \leq M^p \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

also durch Grenzwertbildung $N \rightarrow \infty$ auch $\|x\|_p^p \leq M^p$ bzw. $x \in \ell^p$.

Ferner haben wir

$$\sum_{k=1}^N |\xi_k^n - \xi_k^m|^p < \varepsilon^p \quad \forall N \in \mathbb{N}, n, m \geq n_0(\varepsilon).$$

Für $n \rightarrow \infty$ folgt

$$\sum_{k=1}^N |\xi_k - \xi_k^m|^p < \varepsilon^p \quad \forall N \in \mathbb{N}, m \geq n_0,$$

und mit $N \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \xi_k^m|^p < \varepsilon^p \quad \forall m \geq n_0,$$

also die Konvergenz. ■

Beispiel. Betrachte den Folgenraum $S = \mathbb{K}^\infty = \{x = (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}, \xi_n \in \mathbb{K}\}$. Dann ist

$$p_n(x) := |\xi_n|, \quad p_n : \mathbb{K}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$$

eine abzählbare Familie von Halbnormen mit

$$p_n(x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies x = 0 \in \mathbb{K}^\infty$$

Nach Satz 3.9 folgt, dass (\mathbb{K}^∞, d) mit

$$d(x, y) := \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \frac{p_n(x - y)}{1 + p_n(x - y)}$$

ein metrischer linearer Raum ist. Der Konvergenzbegriff entspricht gerade der komponentenweisen Konvergenz, das heißt, für eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_k = (\xi_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt

$$x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \iff d(x_k, 0) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \iff p_n(x_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \forall n \in \mathbb{N} \iff |\xi_n^k| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \forall n \in \mathbb{N}.$$

Wir fragen uns nun, ob auf dem \mathbb{K}^∞ auch eine Topologie existiert, so dass der induzierte Konvergenzbegriff der gleichmäßigen Konvergenz in allen Komponenten entspricht? Also

$$x_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\text{glm}} 0 \in \mathbb{K}^\infty \iff \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : |\xi_n^k| < \varepsilon \forall k \geq k_0 \forall n \in \mathbb{N}.$$

Wenn \mathbb{K}^∞ ein topologischer linearer Raum sein soll, ist das nicht möglich. Notwendig wäre, dass für eine Folge $x \in \mathbb{K}^\infty$

$$\alpha_k x \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \text{ in } \mathbb{K} \implies \alpha_k x \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \text{ in } X = \mathbb{K}^\infty.$$

Wähle dazu die Nullfolge $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} = (1/k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, $x = (n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$. Dann ist

$$\alpha_k x = (n/k)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^\infty$$

zwar eine Nullfolge in \mathbb{K}^∞ ist, diese Konvergenz ist jedoch nicht gleichmäßig in n . Man kann zeigen, dass \mathbb{K}^∞ mit d vollständig, also ein Fréchet-Raum, ist. Ist \mathbb{K}^∞ auch normierbar? Also gibt es auf \mathbb{K}^∞ eine Norm, welche die gleiche Topologie erzeugt wie die d ? Auch das ist nicht möglich:

(4.4) Lemma. In (\mathbb{K}^∞, d) gilt:

- (a) $B_1(0) = \mathbb{K}^\infty$
- (b) Betrachte den linearen Unterraum $M_{n_0} := \{x = (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } \xi_n = 0 \text{ für } n = 1, \dots, n_0\}$. Dann gibt es für jeden Radius $r > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $M_{n_0} \subset B_r(0)$. Das heißt, jede noch so kleine Metrikugel enthält einen nichttrivialen Unterraum.

Beweis. (a) Das ist trivial.

(b) Sei $r > 0$ gegeben. Wähle nun n_0 , so dass $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} < r$. Dann gilt

$$\forall x \in M_{n_0} : d(x, 0) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \frac{p_n(x)}{1 + p_n(x)} = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x)}{1 + p_n(x)} \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} < r. \quad \blacksquare$$

Wäre nun die Topologie auf (\mathbb{K}^∞, d) nun auch von einer Norm erzeugt, dann wären die Normkugeln

$$B_r^{\|\cdot\|}(0) = \{x \in \mathbb{K}^\infty : \|x\| < r\}$$

auch eine Umgebungsbasis der Null. Das heißt insbesondere würden wir zu jedem \tilde{r} ein r finden, so dass $0 \in B_r^d(0) \subset B_r^{\|\cdot\|}(0)$. Mit Lemma 4.4 folgt also

$$M_{n_0} \subset B_r(0) \subset B_r^{\|\cdot\|}(0)$$

für ein geeignetes n_0 . Sei nun ein $0 \neq x \in M_{n_0}$. Dann ist, da M_{n_0} ein Unterraum ist, auch $\alpha x \in M_{n_0}$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$. Das heißt,

$$|\alpha| \cdot \|x\| = \|\alpha x\| < \tilde{r} \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{K},$$

was bereits $\alpha = 0$ impliziert. Das ist ein Widerspruch.

Beispiel (Räume beschränkter Funktionen). Sei S eine beliebige Menge und $B(S) := \{f : S \rightarrow \mathbb{K}, f(s) \text{ ist beschränkt}\}$. Dann wird $B(S)$ mit

$$\|f\|_{B(S)} := \sup_{x \in S} |f(x)| < \infty,$$

der sup-Norm, zu einem Banachraum. Dabei ist offensichtlich, dass $\|\cdot\|_{B(S)}$ tatsächlich eine Norm ist, und wir werden in einer Übung zeigen, dass die induzierte Metrik tatsächlich vollständig ist.

Lemma. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $Y \subset X$. Es gilt

- (a) Wenn (X, d) vollständig ist und Y abgeschlossen, dann ist auch $(Y, d|_{Y \times Y})$ vollständig.
- (b) Wenn $(Y, d|_{Y \times Y})$ vollständig ist, so ist Y abgeschlossen in (X, d) .

Beweis. Übungsaufgabe. ■

Beispiel (Räume stetiger Funktionen). Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, also nach Heine-Borel abgeschlossen und beschränkt. Dann ist

$$C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{K}, f \text{ stetig}\}$$

ein normierter Raum mit

$$\|f\|_{C(K)} = \|f\|_{\infty} = \max_{t \in K} |f(t)|,$$

der Maximumsnorm. Dieses Maximum wird tatsächlich immer angenommen, da K kompakt ist (Satz von Minimum und Maximum). Insbesondere sind alle stetigen Funktionen auf K beschränkt. Damit gilt offensichtlich $C(K) \subset B(K)$ und $\|f\|_{C(K)} = \|f\|_{B(K)}$ für alle $f \in C(K)$. Da jede stetige Funktion auf kompakten Teilmengen von metrischen Räumen auch gleichmäßig stetig ist, das heißt

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (|t_1 - t_2| < \delta \implies |f(t_1) - f(t_2)| < \varepsilon) \forall t_1, t_2 \in K$$

(4.5) Lemma. $C(K)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $(B(K), \|\cdot\|_{B(K)})$ und somit insbesondere auch (mit Lemma 1) vollständig.

Beweis. Sei $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine konvergente (in $(B(K), \|\cdot\|_{B(K)})$) Folge in $C(K)$. Dann existiert ein $f \in B(K)$ mit $f_i \xrightarrow[i \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_{B(K)}} f$. Wir müssen zeigen, dass f bereits stetig ist. Für beliebige $t_1, t_2 \in K$ gilt

$$|f(t_1) - f(t_2)| \leq \underbrace{|f_i(t_1) - f_i(t_2)|}_{< \varepsilon/3 \text{ für } |t_1 - t_2| < \delta^{(i)}(\varepsilon)} + 2 \underbrace{\|f_i - f\|_{B(K)}}_{< \varepsilon/3 \text{ für } i > i_0} < \varepsilon.$$

Damit ist f auch gleichmäßig stetig, also insbesondere auch stetig und in $C(K)$. ■

Das heißt, die Stetigkeit der Folgenglieder $(f_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset C(K)$ überträgt sich auf die Grenzfunktion und Konvergenz in $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ ist „gleichmäßig auf K “. Wegen dieser Eigenschaft ist die Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ auch die natürliche Norm auf $C(K)$. Andere mögliche Normen (und damit andere Topologien) auf $C(K)$ wären z.B.

$$\|f\|_p = \left(\int_K |f(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Allerdings ist die Konvergenz in dieser Topologie impliziert keine Stetigkeit für die Grenzfunktion.

Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und analog

$$C(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K}, f \text{ stetig}\}.$$

Hier können Funktionen aber auch unbeschränkt sein. Also braucht $\sup |f|$ nicht mehr zu existieren.

(4.6) Definition. Es sei $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von Ω mit kompakten Mengen $K_m \subset \Omega$, das heißt, es gelte

$$\begin{cases} \Omega = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} K_m, & K_m \subset K_{m+1}, \\ K \subset \Omega \text{ kompakt} & \implies K \subset K_m \text{ für ein } m \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Man nehme z.B.

$$K_m = \{x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n : \|x\| \leq m, \text{dist}(x, \partial\Omega) \geq 1/m\},$$

wobei $\text{dist}(x, \partial\Omega) := \inf\{\|x - y\| : y \in \partial\Omega\}$ und $\partial M = \overline{\Omega} \setminus \Omega$.

Dann ist $C(\Omega)$ mit der Metrik

$$d(f, 0) = \sum_{m \in \mathbb{N}} 2^{-m} \frac{\|f\|_{C(K_m)}}{1 + \|f\|_{C(K_m)}}$$

ein Fréchetraum, also ein metrisierbarer linearer Raum nach Satz 3.9, da

$$\|f\|_{C(K_m)} = 0 \forall m \in \mathbb{N} \implies f = 0 \in C(\Omega).$$

Es gilt in diesem Raum

$$d(f_i, f) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0 \iff \|f_i - f\|_{C(K_m)} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0 \forall m \in \mathbb{N},$$

was ja gerade gleichmäßige Konvergenz auf jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ bedeutet. Damit ist Stetigkeit der Folgenglieder $(f_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset C(\Omega)$ impliziert Stetigkeit der Grenzfunktion $f \in C(\Omega)$, da Stetigkeit nur eine lokale Eigenschaft ist.

Wir werden in der Übung sehen, dass $C(\Omega)$ mit dieser Metrik $d_{C(\Omega)}$ nicht normierbar ist.

Beispiel (Räume differenzierbarer Funktionen). (a) Betrachte die Menge $C^\ell(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{R}, D^\alpha f \text{ existiert und ist stetig für } |\alpha| < \ell\}$ der ℓ -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf einer kompakten Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $\ell \in \mathbb{N}_0$. Dabei ist $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex, $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ und

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Dann wird $C^\ell(K)$ mit der Norm

$$\|f\|_{C^\ell(K)} = \max_{|\alpha| \leq \ell} \max_{x \in K} |D^\alpha f(x)|$$

zu einem Banachraum. Die meisten Eigenschaften sind klar, die Vollständigkeit folgt unmittelbar aus der Vollständigkeit von $C(K)$. Konvergenz in $C^\ell(K)$ bedeutet gerade gleichmäßige Konvergenz aller partiellen Ableitungen bis zur Ordnung ℓ auf ganz K .

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $C^\ell(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, D^\alpha f \text{ existiert und ist stetig für } |\alpha| < \ell\}$ der Raum der ℓ -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf Ω mit $\ell \in \mathbb{N}_0$. $C^\ell(\Omega)$ wird mit der Metrik

$$d(f, g) := \sum_{m \in \mathbb{N}} 2^{-m} \frac{p_{m, \ell}(f - g)}{1 + p_{m, \ell}(f - g)}, \quad p_{m, \ell}(f) = \max_{|\alpha| \leq \ell} \|D^\alpha f\|_{C(K_m)},$$

wobei die K_m Ausschöpfungen von Ω mit kompakten Mengen sind, zu einem Fréchetraum. Konvergenz in $C^\ell(\Omega)$ bedeutet gerade gleichmäßige Konvergenz aller partiellen Ableitungen bis zur Ordnung ℓ auf jedem Kompaktum, das in Ω enthalten ist. Auch dieser Raum ist nicht normierbar mit einem analogem Argument wie bei den stetigen Funktionen auf Ω .

(c) Wir betrachten nun einige Unterräume von $C^\ell(\Omega)$:

(i) $C_B^\ell(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, D^\alpha f \text{ existiert, ist beschränkt und ist stetig für } |\alpha| < \ell\}$

wird zum normierten Raum mit

$$\|f\|_{C_B^\ell(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq \ell} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha f(x)|$$

Zwar gilt $C_B^\ell(\Omega) \subset C^\ell(\Omega)$ (als Mengen), jedoch besitzt $C_B^\ell(\Omega)$ nicht die Relativtopologie von $C^\ell(\Omega)$, wie wir in einer Übung sehen werden.

(4.7) Definition. (a) Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

$$\text{supp } f := \overline{\{x \in \Omega, f(x) \neq 0\}}$$

der Träger oder *Support* von f .

(b) Wir sagen für eine Menge $M \subset \Omega$ M liegt kompakt in Ω , wenn \overline{M} kompakt ist und $\overline{M} \subset \Omega$. Wir schreiben dafür $M \subset\subset \Omega$.

(ii) $C_0^\ell(\Omega) = \{f \in C^\ell(\Omega) : \text{supp } f \subset\subset M\}$ Funktionen mit $\text{supp } f \subset\subset M$ haben Luft zum Rand von Ω :

$$\text{dist}(\text{supp}(f), \partial\Omega) > 0,$$

denn sowohl $\text{supp } f$ als auch $\partial\Omega$ sind abgeschlossen. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Topologien für $C_0^\ell(\Omega)$ zu wählen:

(a) $C_0^\ell(\Omega) \subset C^\ell(M)$ mit Spurtopologie von der Metrik.

(b) $C_0^\ell(\Omega) \subset C_B^\ell(M)$ mit Spurtopologie von der Norm.

Diese Topologien sind jedoch nicht identisch.

(d) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $C^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, D^\alpha f \text{ existiert und ist stetig für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^n\} = \bigcap_{\ell \in \mathbb{N}} C^\ell(\Omega)$. Wir definieren die Topologie wieder über eine Metrik durch Seminormen

$$d(f, g) := \sum_{m \in \mathbb{N}} 2^{-m} \frac{p_m(f - g)}{1 + p_m(f - g)}, \quad p_m(f) = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{C(K_m)}.$$

Mit dieser Metrik wird $C^\ell(\Omega)$ zum Fréchetraum. Konvergenz in $C^\infty(\Omega)$ bedeutet gerade gleichmäßige Konvergenz aller partiellen Ableitungen auf jedem Kompaktum, das in Ω enthalten ist. Auch dieser Raum ist nicht normierbar mit einem analogem Argument wie bei den stetigen Funktionen auf Ω .

(e) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $C_0^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : \text{supp } f \subset\subset M\}$ der Raum der Testfunktionen. Ein Beispiel für so eine Funktion ist

$$f(x) = \begin{cases} c \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases},$$

wobei $\Omega = B_2^{\|\cdot\|_\infty}(0)$, $|\cdot| = \|\cdot\|_2$ und $c \in \mathbb{R}$ konstant. Offensichtlich ist $C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\Omega)$.

Wenn man auf $C_0^\infty(\Omega)$ jedoch die Spurtopologie wählt, bekommt man später Probleme (bestimmte Funktionale auf $C_0^\infty(\Omega)$ sind nicht mehr stetig, wie wir in einer Übungsaufgabe sehen werden. Man nennt Funktionale auf $C_0^\infty(\Omega)$ auch Distributionen). Außerdem wäre der $C_0^\infty(\Omega)$ mit dieser Metrik nicht vollständig – der Träger der Grenzfunktion muss nicht mehr beschränkt sein.

Definition. Sei $M \subset X$ und X ein linearer Raum. Dann heißt

$$\text{conv}(M) := \{x : \exists \alpha_i > 0, x_i \in M, i \in \{1, \dots, k\} : \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = x\}$$

die *konvexe Hülle* von M .

Aus Gründen, die erst später zu verstehen sind, wählt man auf $C_0^\infty(\Omega)$ folgende lokal-konvexe Topologie: Setze

$$p(\xi) := \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} \frac{\|\xi\|_{C^k(\Omega)}}{1 + \|\xi\|_{C^k(\Omega)}}, \quad \xi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Sei $(D_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von Ω mit offenen Mengen, also $D_j \subset D_{j+1}, D_j \subset \subset \Omega, \bigcup_{j \in \mathbb{N}} D_j = \Omega$. Eine mögliche Wahl wäre beispielsweise $D_j = K_j^\circ$, wobei die K_j wie oben sind. Für $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty, \varepsilon_j > 0$ für alle \mathbb{N} definieren wir eine Umgebungsbasis der $0 \in C_0^\infty(\Omega)$ durch alle Mengen

$$U_\varepsilon := \text{conv} \left[\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \{\xi \in C_0^\infty : p(\xi) < \varepsilon_j\} \right] \subset C_0^\infty(\Omega).$$

mit $\varepsilon = (\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty, \varepsilon_j > 0$ und endliche Schnitte davon. Andere Umgebungen umgeben sich durch Translation. Die so definierte Topologie nennen wir $\mathcal{T}_\mathcal{D}$ und den Raum $C_1^\infty(\Omega)$ auch $\mathcal{D}(\Omega)$. Es stellt sich heraus, dass diese Topologie tatsächlich unabhängig von der gewählten Ausschöpfung ist. Außerdem ist $(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{T}_\mathcal{D})$ ein topologischer linearer Raum, das heißt, die Vektorraumoperationen sind stetig.

(4.8) Lemma (Charakterisierung offener Mengen in $\mathcal{D}(\Omega)$). Es gilt

$$O \in \mathcal{T}_\mathcal{D} \Leftrightarrow \forall \xi \in O \exists \varepsilon = (\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty, \varepsilon_j > 0 : \xi + U_\varepsilon \subset O.$$

Das heißt, die Topologie $\mathcal{T}_\mathcal{D}$ und die Topologie

$$\tilde{\mathcal{T}}_\mathcal{D} = \{O \subset C_0^\infty(\Omega) : \forall \xi \in O \exists \varepsilon = (\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\infty, \varepsilon_j > 0 : \xi + U_\varepsilon \subset O\}$$

sind gleich.

Beweis. Übung. ■

(4.9) Korollar. Die Mengen U_ε sind bereits eine Umgebungsbasis der Null. Nach Definition sind sie aber auch Konvex, das heißt $(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{T}_{\mathcal{D}})$ ist ein lokalkonvexer Hausdorff-Raum.

(4.10) Satz. $\xi_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \iff$

$$\begin{cases} (i), & \text{Es existiert } D \text{ offen mit } D \subset\subset \Omega \text{ und } \xi_m \in C_0^\infty(D) \text{ für alle } m \in \mathbb{N} \\ (ii), & \text{Für jedes } k \in \mathbb{N} \text{ gilt: } \|\xi_m\|_{C^k(\bar{\Omega})} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0 \end{cases}$$

Beweis. Zeige nur „ \Leftarrow “. Sei dazu $(\xi_m)_{m \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit (i) und (ii). Wähle nun D_j von oben mit $D \subset D_j$ (j ist fest). Sei nun $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}, \varepsilon_i > 0$ gegeben. Dann müssen wir zeigen, dass für alle $m > m_0$ schon $\xi_m \in U_\varepsilon$ gilt. Zunächst sind nach (i) $\xi_m \in C_0^\infty(D_j)$. Außerdem gilt

$$p(\xi_m) \leq \underbrace{\sum_{k=1}^N 2^{-k} \frac{\|\xi_m\|_{C^k(\bar{\Omega})}}{1 + \|\xi_m\|_{C^k(\bar{\Omega})}}}_{\text{wegen (i) } < \varepsilon_j/2 \text{ für } m \geq m_0(\varepsilon_j, N)} + \underbrace{\sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-k}}_{< \varepsilon_j/2 \text{ für } n \text{ groß genug}} < \varepsilon_j.$$

■

(f) Betrachten wir nun Lebesgue-integrierbare Funktionen. Bereits eingeführt wurden die Räume $\mathcal{L}^p(\Omega)$ und $L^p(\Omega)$, $0 < p < \infty$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Diese sind für $1 \leq p < \infty$ normiert, und für $0 < p < 1$ quasi-normiert. Für $p = \infty$ setzen wir

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}, f \text{ messbar und fast überall beschränkt}\}.$$

Damit haben wir offenbar

$$C(\Omega) \cap B(\Omega) \subset \mathcal{L}^\infty(\Omega).$$

Sei

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(\Omega)} := \sup_{t \in \Omega} \text{ess } |f(t)| := \inf_{M \subset \Omega \text{ NM}} \sup_{t \in \Omega \setminus M} |f(t)|.$$

Dann gilt für $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega)$

$$\|f\| = 0 \iff f = 0 \text{ fast überall}$$

Mit $N := \{f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega) : \|f\| = 0\}$ wird

$$L^\infty(\Omega) := \left(\mathcal{L}^\infty(\Omega)/N, \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)} \right)$$

zu einem normiertem Raum.

Vorlesung vom Donnerstag, 9. November fehlt (ge-

nauso wie vermutlich alle weiteren Donnerstagsvorlesungen ab jetzt)

Seien $f_n \rightarrow f \in L^p(\Omega)$, $h \in C_0^\infty(\Omega)$. Dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(t) h(t) dt = \int_{\Omega} f(t) h(t) dt,$$

denn

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (f_n(t) - f(t)) h(t) dt &\leq \int_{\text{supp } h} M |f_n(t) - f(t)| dt \\ &\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} M [\text{supp}(h)]^{1/q} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

§ 5 Beschränkte und kompakte Mengen in metrischen linearen Räumen

Wir wissen bereits nach dem Satz von Heine-Borel, dass eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ genau dann kompakt ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Beschränktheit bedeutet hier in einer (beliebigen, da alle äquivalent) Norm.

Nun wollen wir so ein Konzept für Beschränktheit auch in allgemeinen metrischen (topologischen) linearen Räumen finden.

Problem. Die natürliche Übertragung $d(x, 0) \leq M$, $x \in B$ definiert *keine* Beschränktheit. Gründe dafür sind:

- (a) In einigen metrischen Räumen gilt ohnehin $d(x, 0) \leq 1$ für alle $x \in X$.
- (b) Ist d eine Metrik auf X . Dann ist $\tilde{d} := \frac{d}{1+d} \leq 1$ eine zu d äquivalente Metrik auf X , wie wir in Topologie gesehen haben.

(5.1) Definition. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer linearer Raum, $B \subset X$ heißt *beschränkt*, falls zu jeder offenen Umgebung U von $0 \in X$ ein $\alpha > 0$ existiert, so dass $B \subset \alpha U = \{\alpha u : u \in U\}$, das heißt jede Nullumgebung lässt sich so weit „aufblasen“, dass sie B überdeckt.

Bemerkung. Der Begriff „Beschränktheit“ hängt also von der Topologie ab.

(5.2) Satz. Sei (X, d) ein metrischer linearer Raum, dessen Metrik gemäß Satz 3.9 von abzählbar vielen Seminormen $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ induziert ist. Dann ist eine Teilmenge $B \subset X$ genau dann beschränkt, wenn für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $M_k > 0$ existiert mit $p_k(x) \leq M_k$ für alle $x \in B$.

Beweis. „ \Rightarrow “: Sei $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Setze $r_k := \frac{1}{2^{k+1}}$ und $U := B_{r_k}(0)$. Da B beschränkt ist, gibt es $\alpha = \alpha_k > 0$, dass

$$\begin{aligned} B &\subset \alpha U = \alpha B_{r_k}(0) \\ &\Leftrightarrow \alpha^{-1}B \subset B_{r_k}(0) \\ &\Leftrightarrow d(\alpha^{-1}x, 0) < r_k \forall x \in B \end{aligned}$$

Dann gilt schon $p_k(x) \leq M_k := \alpha_k$ für alle $x \in B$, denn

$$\frac{1}{2^{k+1}} = r_k > d(\alpha_k^{-1}x, 0) \geq 2^k \frac{p_k(\alpha_k^{-1}x)}{1 + p_k(\alpha_k^{-1}x)} = 2^{-k} \frac{\alpha_k^{-1}p_k(x)}{1 + \alpha_k^{-1}p_k(x)}.$$

Also mit $\eta := \alpha_k^{-1}p_k(x)$ gilt $\frac{1}{2} > \frac{\eta}{1+\eta}$, also $\eta < 1$ oder $p_k(x) \leq M_k$ für alle $x \in B$.

„ \Leftarrow “: Sei also $p_k(x) \leq M_k$ für alle $x \in B$ und $k \in \mathbb{N}$. Wir müssen nun zeigen, dass es für jedes $r > 0$ ein $\alpha > 0$ gibt mit $B \subset \alpha B_r(0)$, also $\alpha^{-1}B \subset B_r(0)$. Sei also $r > 0$ gegeben. Wähle nun $m_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=m_0+1}^{\infty} 2^{-n} < r/2$. Wähle $\alpha > 0$ mit $\sum_{n=1}^{m_0} 2^{-n} \frac{\alpha^{-1}M_k}{1+\alpha^{-1}M_k} < r/2$. Dann gilt für alle $x \in B$

$$d(\alpha^{-1}x, 0) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \frac{\alpha^{-1}p_n(x)}{1 + \alpha^{-1}p_n(x)} \leq \sum_{n=1}^{m_0} 2^{-n} \frac{\alpha^{-1}p_n(x)}{1 + \alpha^{-1}p_n(x)} + \sum_{n=m_0+1}^{\infty} 2^{-n} < r/2 + r/2 = r.$$

■

(5.3) Korollar. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter linearer Raum, Dann ist eine Teilmenge $B \subset X$ genau dann beschränkt, wenn $M > 0$ existiert mit $\|x\| \leq M$ für alle $x \in B$.

Beweis. Wähle $p_1(x) = \|x\|$ und $p_k \equiv 0$ für $k \geq 2$ und verwende den vorherigen Satz. ■

(5.4) Bemerkung. Kugeln $B_r(0)$ in (X, d) , wobei d wie in Satz 3.9, sind also immer unbeschränkt, weil nichttriviale Unterräume $M_{n_0} \subset B_r(x)$ existieren. Insbesondere ist dies gültig in den Räumen $\mathbb{K}^\infty, C(\Omega), C^\ell(\Omega)$ und $C^\infty(\Omega)$.

(5.5) Definition. Ein topologischer linearer Raum (X, \mathcal{T}) heißt *lokalbeschränkt*, falls $0 \in X$ eine beschränkte Umgebung besitzt.

(5.6) Bemerkung. Normierte Räume sind lokalbeschränkt und lokalkonvex. Es gilt aber auch die Umkehrung:

(5.7) Satz (Kolmogorov). Ein topologischer linearer Raum (X, \mathcal{T}) ist genau dann normierbar, das heißt, die Topologie wird von einer Norm induziert, wenn (X, \mathcal{T}) lokalkonvex und lokalbeschränkt ist.

Beispiel. Die Räume \mathbb{K}^∞ , $C(\Omega)$, $C^\ell(\Omega)$ und $C^\infty(\Omega)$ sind nicht lokalbeschränkt, aber lokalkonvex. Somit sind sie auch nicht normierbar. Auch $L^p(0, 1)$ mit $0 < p < 1$ ist nicht lokalkonvex, aber lokalbeschränkt, also nicht normierbar.

(5.8) Definition. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer linearer Raum. Eine Umgebung U der Null heißt *kreisförmig* oder *balanced*, falls

$$tU \subset U, \quad |t| < 1$$

(5.9) Lemma. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer linearer Raum. Dann besitzt die Null eine Umgebungsbasis aus kreisförmigen Mengen.

Beweis. Übung. ■

Warnung. Metrikugeln müssen im Allgemeinen nicht kreisförmig sein (obwohl die uns bekannten Kugeln dies sind). Gegenbeispiel: $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) := \left| \int_x^y 1 + \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(s) ds \right|$.

(5.10) Lemma. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer linearer Raum und $V \in \mathcal{T}$ eine Umgebung der 0. Dann gilt

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nV.$$

Beweis. „ \supset “: klar.

„ \subset “: Sei $x \in X$. Setze $\beta_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\beta_n x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

also $\beta_n x \in V$ für $n \geq n_0$. Damit haben wir aber $x \in n_0 V$. ■

(5.11) Satz. Sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer linearer T_2 -Raum und $K \subset X$ kompakt. Dann ist K abgeschlossen und beschränkt.

Definition. Falls auch die Umkehrung gilt, dann besitzt X die *Heine-Borel-Eigenschaft*.

Warnung. Im Allgemeinen ist die Umkehrung falsch.

Beweis. Nach einer Übungsaufgabe ist K bereits abgeschlossen. Also müssen wir nur zeigen, dass K auch beschränkt ist. Sei $V \in \mathcal{T}$ eine Nullumgebung. Sei $W \subset V$ eine kreisförmige Umgebung der 0, die ganz in V enthalten ist. Da

$$K \subset X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nW$$

eine offene Überdeckung von K ist, besitzt diese wegen K kompakt eine endliche Teilüberdeckung

$$K \subset \bigcup_{i=1}^s n_i W \stackrel{(*)}{=} n_s W, \quad n_1 < n_2 < \dots < n_s,$$

also folgt die Behauptung mit $\alpha = n_s$. $(*)$ gilt wegen der Kreisförmigkeit und $\left| \frac{n_i}{n_s} \right| \leq 1$. ■

Bemerkung. Ohne die Hausdorff-Eigenschaft gilt dies nicht. Gegenbeispiel: $X = \mathbb{R}$ mit der Klumpentopologie. Dann ist jede Teilmenge von \mathbb{R} kompakt, aber nur \emptyset und \mathbb{R} sind abgeschlossen.

(5.12) Definition. (a) In einem topologischen Raum (X, \mathcal{T}) heißt eine Menge $A \subset X$ *relativ kompakt*, falls \overline{A} kompakt ist.

(b) In einem metrischen Raum (X, d) heißt eine Menge $A \subset X$ *präkompakt*, falls für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge A von endlich vielen Bällen mit Radius ε überdeckt werden kann.

(5.13) Satz. Sei (X, d) ein metrischer Raum, $\emptyset \neq A \subset X$. Dann sind äquivalent:

- (a) A ist kompakt.
- (b) A ist folgenkompakt.
- (c) $(A, d|_{A \times A})$ ist vollständig und A präkompakt.

Beweis. (a) \Leftrightarrow (b) wurde bereits gezeigt. Wir zeigen nur (b) \Rightarrow (c): Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ eine Cauchy-Folge. Nach (b) besitzt $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ einen Häufungspunkt x^* . Da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchy-Folge ist, konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ schon gegen x^* . Damit ist A vollständig.

Angenommen, A wäre nicht präkompakt. Dann gibt es $\varepsilon > 0$, so dass A keine endliche Überdeckung mit ε -Kugeln besitzt. Dadurch kann man eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ definieren, mit $d(x_k, x_j) > \varepsilon$ für $k \neq j$. Dann besitzt $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ offensichtlich keine Cauchy-Teilfolge, also auch keinen Häufungspunkt. Also A präkompakt. ■

Hier fehlt eine Vorlesung.

§ 6 ?

(6.1) Satz. 3.6.4.

Hier gilt $M = \inf\{c \geq 0 : \text{mit } C \text{ gilt (5)}\}$.

Beweis. (1) \Leftrightarrow (2) schon gezeigt.

(3) \Leftrightarrow (4) klar durch die Charakterisierung von beschränkten Mengen in normierten Räumen und Ausnutzung der Linearität.

(2) \Rightarrow (4). Sei T stetig in x^* . Wähle $\varepsilon > 0$, so dass $T(\overline{B}_\varepsilon(x^*)) \subset B_1(T(x^*))$. Dann gilt für alle $x \in \overline{B}_1(0)$

$$x^* + \varepsilon x \in \overline{B}_\varepsilon(x^*)$$

und $T(x^*) + \varepsilon T(x) = T(x^* + \varepsilon x) \in B_1(T(x^*))$, das heißt $\varepsilon T(x) \in B_1(0)$ oder $\|T(x)\|_Y \leq \frac{1}{\varepsilon} =: M$

(4) \Rightarrow (5). Für $x \neq 0$ gilt

$$\|T(x)\| \leq \|x\| \left\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq M \|x\|,$$

also gilt die Aussage mit $C := M$.

(5) \Rightarrow (1). Für $x, x_1 \in X$ gilt

$$\|T(x) - T(x_1)\| = \|T(x - x_1)\| \leq C \|x - x_1\| \xrightarrow{x \rightarrow x_1} 0.$$

Damit ist T stetig in x_1 . ■

(6.2) Korollar. Sei die Situation wie in 6.4. Ist T zusätzlich bijektiv, so ist T genau dann ein Homöomorphismus, wenn es Konstanten $m, M > 0$ gibt mit

$$m \|x\| \leq \|T(x)\| \leq M \|x\|$$

für alle $x \in X$

Beweis. klar. ■

Warnung. T linear, bijektiv und stetig impliziert selbst in normierten Räumen noch nicht, dass auch die Inverse Abbildung T^{-1} auch stetig ist, wie wir in der Übung sehen werden. Sind X und Y aber Banachräume, so gilt dies aber (Satz von der offenen Abbildung).

Nun zur Charakterisierung von Stetigkeit in metrischen linearen Räumen.

(6.3) Satz. Sei $T : X \rightarrow Y$ linear, X, Y lineare metrische Räume. Dann ist T genau dann stetig, wenn T beschränkt ist.

In topologischen linearen Räumen gilt dies jedoch nicht.

(6.4) Satz. 3.6.7

Beweis. Nur „ \Leftarrow “: Nach 6.6 reicht es, Beschränktheit von T zu zeigen, also dass, wenn $B \subset X$ beschränkt ist, auch $T(B) \subset Y$ beschränkt ist. $B \subset X$ ist genau dann beschränkt, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$ $C_k > 0$ existieren mit $p_k(x) \leq C_k$ für alle $x \in B$. Nach Voraussetzung ist dann aber auch für alle $x \in B$

$$q_m(Tx) \leq M_m(C_{n_1} + \dots + C_{n_k}) =: K_m,$$

was nach 5.2 heißt, dass $T(B)$ beschränkt in Y ist. ■

(6.5) Definition. Seien X, Y topologische lineare Räume. Dann bezeichnet $\mathcal{L}(X, Y) := \{T : X \rightarrow Y : T \text{ linear und stetig}\}$ den *Raum der stetigen (beschränkten) Operatoren*. Im Spezialfall $Y = \mathbb{K}$ sei $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ der *Raum der stetigen Funktionale* oder auch der *Dualraum* von X .

Bemerkung. (a) $\mathcal{L}(X, Y)$ ist wieder ein linearer Raum.

- (b) Metrische lineare Räume haben Dualräume, die im Allgemeinen nicht mehr metrisierbar sind.
- (c) $X' = \{0\}$ ist möglich, wie wir in der Übung sehen werden
- (d) Ist X jedoch normierbar, so folgt aus den Hahn-Banach-Sätzen, dass X' nichttrivial ist.
- (e) Falls X und Y normierte Räume sind, dann wird $\mathcal{L}(X, Y)$ ebenfalls zu einem normierten Raum mit der Operatornorm

$$\|T\| := \|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} := \sup\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X \leq 1\} = \inf\{C \geq 0 : \forall x \in X : \|Tx\|_Y \leq C \|x\|_X\}.$$

Das heißt, wir haben

$$\forall x \in X : \|Tx\|_Y \leq \|T\| \|x\|_X \quad (3.2)$$

Also haben wir

$$\|(T_1 + T_2)x\| = \|T_1x + T_2x\| \leq \|T_1x\| + \|T_2x\| \leq (\|T_1\| + \|T_2\|) \|x\|,$$

und somit $T_1 + T_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$ nach (3.2).

- (f) Auf $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ergeben sich die bekannten Matrixnormen.

(6.6) Satz. Seien X, Y normierte Räume, Y vollständig. Dann ist $\mathcal{L}(X, Y)$ ein Banachraum. Insbesondere ist X' immer ein Banachraum.

Sei Z ebenfalls ein normierter Raum. Ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$, so ist $ST \in \mathcal{L}(X, Z)$ und $\|ST\|_{\mathcal{L}(X, Z)} \leq \|S\| \|T\|$.

Beweis. Es ist nur noch die Vollständigkeit zu zeigen. Sei dazu $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}(X, Y)$. Das heißt, für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein N_0 mit $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$ für $n, m > N_0$. Also mit (3.2) $\|T_nx - T_mx\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| < \varepsilon \|x\|$ für alle $x \in X$ und $n, m > N_0$. Insbesondere ist $(T_nx)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in Y . Da Y vollständig ist, besitzt diese Folge einen Grenzwert $y_x \in Y$. Wir definieren eine Abbildung

$$T : X \rightarrow Y, x \mapsto y_x.$$

Dann ist T linear, weil alle T_n linear sind. Also ist nur die Stetigkeit von T und die Konvergenz von $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen T zu zeigen. Für die Stetigkeit bekommt man unter Verwendung der

Dreiecksungleichung direkt

$$|||T_n|| - |||T_m||| \leq ||T_n - T_m|| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N_0,$$

also eine Cauchyfolge $(||T_n||)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} , die wegen der Vollständigkeit von \mathbb{R} konvergent, also insbesondere auch beschränkt ist. Damit gibt es $M > 0$ mit $||T_n|| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also mit (3.2)

$$||Tx|| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} ||T_n x|| \leq M ||x||, \quad \forall x \in X,$$

also die Stetigkeit von T . Jetzt zur Konvergenz: Für $||x|| \leq 1$ gilt

$$||T_n x - T_m x|| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N_0,$$

also durch Grenzwertbildung $n \rightarrow \infty$

$$||T_n x - Tx|| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N_0,$$

und mit (3.2)

$$||T_n - T|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||T_n x - Tx|| < \varepsilon, \quad \forall n \geq N_0,$$

das heißt $T_n \rightarrow T$ wie gewünscht.

Für den Zusatz haben wir

$$||S(Tx)|| \leq ||S|| ||Tx|| \leq ||S|| ||T|| ||x||.$$

Da das für alle $x \in X$ gilt, haben wir $||ST|| \leq ||S|| ||T||$. ■

(6.7) Korollar. Ist X ein Banachraum, dann ist $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$ eine Banachalgebra, das heißt ein vollständiger normierter Vektorraum mit einer Multiplikation, so dass für $T, S \in \mathcal{L}(X)$ gilt:

$$||TS|| \leq ||T|| ||S||.$$

(6.8) Bemerkung. Ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, so ist $\ker T$ als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ stets abgeschlossen in X . Das Bild hingegen $R(T) := \operatorname{im} T$ ist im Allgemeinen jedoch nicht abgeschlossen. Wann sind Elemente in $\mathcal{L}(X)$ invertierbar?

(6.9) Satz. Sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{L}(X)$ mit $\limsup_{m \rightarrow \infty} ||T||^{1/m} < 1$. Dann ist $(\operatorname{id} - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ und es gilt

$$(\operatorname{id} - T)^{-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m T^n =: \sum_{n=0}^{\infty} T^n \in \mathcal{L}(X).$$

mit Konvergenz in $\mathcal{L}(X)$.

Beweis. Wähle m_0 und $\Theta < 1$ mit $\|T^n\| < \Theta^n$ für $n \geq m_0$. Für $S_k \sum_{n=0}^k T^n$ gilt dann für $m_0 \leq k < l$

$$\|S_l - S_k\| = \left\| \sum_{n=k+1}^l T^n \right\| \leq \sum_{n=k+1}^l \|T^n\| \leq \sum_{n=k+1}^l \Theta^n < \varepsilon, \quad k, l \geq N_0.$$

Damit ist $(S_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}(X)$ und somit konvergent. Sei S der Grenzwert. Dann gilt für jedes $x \in X$ auch $S_k x \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_X} Sx$, also damit ist für alle $x \in X$

$$(\text{id} - T)Sx = \lim_{k \rightarrow \infty} (\text{id} - T)S_k x = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k (T^n - T^{n-1})x = \lim_{k \rightarrow \infty} x - T^{k+1}x = x.$$

Damit ist $(\text{id} - T)S = \text{id}$. Da sich analog $S(\text{id} - T) = \text{id}$ auch zeigen lässt, folgt die Behauptung. ■

(6.10) Lemma. 3.7.6

Bemerkung. Mit $\Theta = 1$ geht es nicht immer. Gegenbeispiel: Sei $X = C[0, 1] \cap \{x(0) = 0\}$ und $M = \{x \in X : \int_0^1 x(t) dt = 0\}$. Dann ist M ein abgeschlossener linearer Unterraum, weil $T : X \rightarrow \mathbb{R}, \int_0^1 \cdot$ stetig ist und somit $M = T^{-1}(\{0\})$ als Urbild einer abgeschlossenen Menge in \mathbb{R} abgeschlossen ist. Angenommen, $(\Theta = 1)$, es existierte ein $x_\Theta = x_\infty$ mit $\|x\|_1 =$ und $\|x - x_1\| \geq 1$ für alle $x \in M$. Dann setze

$$c(y) := \frac{\int_0^1 x_1(t) dt}{\int_0^1 y(t) dt} \in \mathbb{R}$$

für alle $y \notin M$. Man beachte, dass dies wohldefiniert ist. Dann ist $x_1 - c(y)y \in M$, also $1 \leq \|x_1 - c(y)y - x_1\| = |c(y)| \|y\|$. Dann $\int_0^1 x_1 c(y)y dt = 0$ oder $\frac{1}{|c(y)|} \leq \|y\|$ oder $\left| \int_0^1 y(t) dt \right| \leq \left| \int_0^1 x_1(t) dt \right| \|y\|$ für alle $y \in X \setminus M$. Wähle $y_n(t) = t^{1/n} \in X$, also $\|y_n\| = 1$. Es gilt $\left| \int_0^1 y_n(t) dt \right| \leq \left| \int_0^1 x_1(t) dt \right| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\int_0^1 x_1(t) dt = 1$ und $x_1(t) \leq 1$, was aber bereits impliziert, dass x_1 identisch 1 ist. Damit ist $x_1 \notin X$.

(6.11) Satz. 7.7

Beweis. „ \Leftarrow “ war Korollar 7.4.

„ \Rightarrow “. Angenommen, $\dim X = \infty$. Sei $S^1 := \{x \in X : \|x\| = 1\}$. Da S^1 abgeschlossen und beschränkt ist, ist S^1 nach Annahme kompakt. Wähle $x_1 \in S^1$ und $M_1 := \text{span}\{x_1\} \subsetneq X$.

M_1 ist ein abgeschlossener Unterraum nach Korollar 7.5. Nach Ries existiert ein $x_2 \in S_1$ mit $\|x_2 - x_1\| \geq \Theta := \frac{1}{2}$. Setze nun $M_2 := \text{span}\{x_1, x_2\}$. Da M_2 ein abgeschlossener Unterraum ist, existiert ein $x_3 \in S_1$ mit $\|x_3 - x\| \geq \Theta$ für alle $x \in M_2$, also insbesondere $\|x_3 - x_1\| \geq \Theta = \frac{1}{2}$ und $\|x_3 - x_2\| \geq \Theta = \frac{1}{2}$. Iterativ (da $\dim X = \infty$) existiert $x_n \in S_1$ mit $\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2}$ für $m \geq n$. Somit haben wir eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ohne Häufungspunkt in S^1 gefunden im Widerspruch zu S^1 kompakt. ■

Damit sind in unendlich-dimensionalen normierten Räumen weder die Sphären noch die abgeschlossenen Kugeln kompakt.

(6.12) Definition. Ein topologischer linearer Raum X heißt *lokalkompakt*, wenn $0 \in X$ eine Umgebung U besitzt, deren Abschluss kompakt ist.

(6.13) Korollar. Sei X normiert, $\dim X = \infty$. Dann ist X nicht lokalkompakt.

Beweis. Angenommen, dass doch. Dann gibt es $r > 0$, so dass $S_r = \{x \in X : \|x\| = r\} \subset \overline{U}$. Da \overline{U} nach Annahme kompakt ist und S_r abgeschlossen, ist S_r ebenfalls kompakt. Das ist ein Widerspruch. ■

Kapitel 4

Unitäre Räume und Hilberträume

§ 1 Grundbegriffe

Sei wieder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

(1.1) Definition. Sei X ein linearer Raum über \mathbb{K} . Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$ heißt *Skalarprodukt* auf X , falls gilt

(U1) $\langle x, x \rangle > 0$ für alle $0 \neq x \in X$.

(U2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ für alle $x, y \in X$.

(U3) $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, x, y, z \in X$.

$(X, \langle -, - \rangle)$ heißt *Skalarproduktraum*, *unitärer Raum* oder *Prähilbertraum*.

Bemerkung. Offenbar ist $\langle -, - \rangle$ in der ersten Komponente konjugiert linear.

(1.2) Satz. Sei $(X, \langle -, - \rangle)$ ein unitärer Raum. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(a) Durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ wird eine Norm definiert. Dadurch wird jeder unitäre Raum auf natürliche Art und Weise normiert und trägt dadurch die induzierte natürliche Topologie.

(b) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ mit Gleichheit genau dann, wenn x und y linear abhängig (Cauchy-Schwarz-Ungleichung).

(c) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (Parallelogrammgleichung),

(d) Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2),$$

für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 - i \|x + iy\|^2 + i \|x - iy\|^2).$$

Beweis. (a) Einfaches Nachrechnen unter Verwendung von (b)

(b) Für $y = 0$ ist die Behauptung klar. Sei also $y \neq 0, \alpha \in \mathbb{C}$. Dann

$$\langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle + \bar{\alpha} \langle y, x \rangle + \alpha \langle x, y \rangle + |\alpha|^2 \langle y, y \rangle.$$

Speziell für $\bar{\alpha} := -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ ergibt sich

$$0 \leq \langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} = \langle x, x \rangle - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle}.$$

Durch Umstellen ergibt sich

$$\langle x, x \rangle \geq \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\langle y, y \rangle} \iff |\langle x, y \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

Die CSU erhält man durch Wurzel ziehen. Gleichheit gilt genau dann, wenn

$$\langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle = 0 \iff x + \alpha y = 0,$$

also wenn x und y linear abhängig sind.

(c) Es gilt

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2 \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2.$$

Addieren dieser Gleichungen für $+$ und $-$ ergibt die Behauptung.

(d) Es gilt

$$\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = (\|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2) - (\|x\|^2 - 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle + \|y\|^2) = 4 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle.$$

Analog haben wir

$$-i \|x + iy\|^2 + i \|x - iy\|^2 = \dots = 4i \operatorname{Im} \langle x, y \rangle,$$

was die Behauptung impliziert. ■

(1.3) Satz. Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, der die Parallelogrammgleichung erfüllt. Dann definieren

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2),$$

und

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 - i \|x + iy\|^2 + i \|x - iy\|^2).$$

Skalarprodukte auf X (für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bzw \mathbb{C}).

Beweis. Stupid nachrechnen (oder so ähnlich). ■

(1.4) Bemerkung. (a) Die Parallelogrammgleichung ist also charakteristisch für unitäre Räume.

(b) $(C(S), \|\cdot\|_\infty)$ mit $S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt erfüllt dies nicht.

(c) Die Abbildung $\langle -, - \rangle$ in unitären Räumen ist stetig in beiden Komponenten als unmittelbare Konsequenz aus der Stetigkeit der Norm.

(1.5) Definition. Ein bezüglich der Norm $\|-\| := \sqrt{\langle -, - \rangle}$ vollständiger unitärer Raum $(X, \langle -, - \rangle)$ heißt *Hilbertraum*.

Hier fehlt eine VL.

(1.6) Korollar. \hat{y} erfüllt die Gleichung aus dem vorherigen Satz genau dann, wenn $(x - \hat{y}) \perp Y$ gilt.

Beweis. „ \Leftarrow “: Sei also $\hat{y} \in Y$ mit $x - \hat{y} \perp Y$, also $x - \hat{y} \perp (\hat{y} - y)$ für $y \in Y$ beliebig. Dann gilt mit Pythagoras

$$\|x - y\|^2 = \|x - \hat{y} + \hat{y} - y\|^2 = \|x - \hat{y}\|^2 + \|\hat{y} - y\|^2 \geq \|x - \hat{y}\|^2,$$

was die Behauptung impliziert. ■

Bemerkung. Damit gilt im Hilbertraum das Riesz'sche Lemma (3.7.6) mit $\Theta = 1$. Setze dazu $x_{\Theta=1} := \frac{x-\hat{y}}{\|x-\hat{y}\|}$ für ein $x \notin Y$. Dann ist $\|x_{\Theta}\| = 1$ und für alle $z \in Y$ gilt $\|z - x_{\Theta}\|^2 + 2 \operatorname{Re}\langle z, x_{\Theta} \rangle + \|x_{\Theta}\|^2 \geq 1 = \Theta$.

(1.7) Satz. Es sei Y ein vollständiger Unterraum eines unitären Raums X . Dann existiert zu jedem $x \in X$ eine eindeutige Zerlegung der Form

$$x = y + v$$

mit $y \in Y$ und $v \in Y^\perp$, das heißt $X = Y \oplus Y^\perp$.

Beweis. Jedes $x \in X$ lässt sich als $x = \hat{y} + (x - \hat{y})$ schreiben, wobei \hat{y} wie im Vorherigen Satz ist. Dann ist $\hat{y} \in Y$ und $(x - \hat{y}) \in Y^\perp$. Für die Eindeutigkeit seien $x = y_1 + v_1 = y_2 + v_2$ zwei Darstellungen von x mit $y_i \in Y, v_i \in Y^\perp, i = 1, 2$. Dann $y_1 - y_2 = v_2 - v_1$, wobei die linke Seite in Y ist und die rechte in Y^\perp , aber $Y \cap Y^\perp = \{0\}$ nach einem vorherigen Resultat, also $y_1 = y_2$ und $v_1 = v_2$. ■

Bemerkung. Weil für jedes $x \in X$ das Element $y = \hat{y}(x) \in Y$ in dieser Darstellung eindeutig ist, lässt sich dadurch eine Abbildung $P : X \rightarrow X, x \mapsto y$ definieren. Diese Abbildung ist eine Projektion, das heißt $P \circ P = P$. Wir schreiben für P auch $\operatorname{proj}_Y : X \rightarrow X$ mit Wertebereich im $P = Y$ und $P|_Y = \operatorname{id}|_Y$.

(1.8) Korollar. Falls $M \subset X$ ein Unterraum des Hilbertraums X ist, dann gilt

$$\overline{M} = (M^\perp)^\perp.$$

Beweis. „ \subset “ wurde bereits in Definition 2.1 gezeigt.

„ \supset “: Falls $(M^\perp)^\perp \neq \overline{M}$, dann existiert $x_0 \in (M^\perp)^\perp \setminus \overline{M}$. Da X ein Hilbertraum ist, ist \overline{M} vollständig. Nach dem Satz vom orthogonalen Komplement gibt es eine eindeutige orthogonale Zerlegung von $x_0 = \hat{x}_0 + h_0^\perp$ mit $\hat{x}_0 = \text{proj}_M(x_0) \in \overline{M}$ und $x_0^\perp \in (\overline{M})^\perp$. Da $x_0^\perp \in (\overline{M})^\perp$, ist auch $x_0^\perp \in (M)^\perp$ und $x_0 \in (M^\perp)^\perp$, also insbesondere $\langle x_0, x_0^\perp \rangle = 0$. Das bedeutet mit Hilfe der Zerlegung

$$0 = \langle x_0, x_0^\perp \rangle = \langle \hat{x}_0 + x_0^\perp, x_0^\perp \rangle = \langle \hat{x}_0, x_0^\perp \rangle + \langle x_0^\perp, x_0^\perp \rangle = \langle x_0^\perp, x_0^\perp \rangle = \|x_0^\perp\|^2.$$

somit ist bereits $x_0^\perp = 0$, also $x_0 = \hat{x}_0 \in \overline{M}$. Damit ist $\overline{M} = (M^\perp)^\perp$. ■

Bemerkung. Die Abbildung P ist beschränkt mit Operatornorm $\|P\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|P(x)\|}{\|x\|} \leq 1$, denn für jedes $x = y + v$ mit $y \in Y, v \in Y^\perp$ gilt

$$\|P(x)\|^2 = \|y\|^2 \leq \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle y, v \rangle + \|v\|^2 = \|y + v\|^2 = \|x\|^2.$$

Desweiteren ist P symmetrisch, das heißt für alle $x_1, x_2 \in X$ ist

$$\langle P(x_1), x_2 \rangle = \langle x_1, P(x_2) \rangle.$$

Ist $x_1 = y_1 + v_1, x_2 = y_2 + v_2$ mit $y_i \in Y, v_i \in Y^\perp, i = 1, 2$, dann ist

$$\langle P(x_1), x_2 \rangle = \langle y_1, x_2 \rangle = \langle y_1, y_2 + v_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle = \langle y_1 + v_1, y_2 \rangle = \langle x_1, P(x_2) \rangle.$$

(1.9) Korollar. Es Sei $Y \neq \{0\}$ ein vollständiger Unterraum des unitären Raums X mit der Projektion $P = \text{proj}_Y : X \rightarrow Y \subset X$. Dann gilt

- (a) $x - P(x) \perp Y$ für alle $x \in X$.
- (b) P ist symmetrisch.
- (c) P ist beschränkt mit Operatornorm $\|P\| = 1$.

Beweis. (1) und (2) wurden bereits gezeigt. Bei (3) fehlt nur noch „ \geq “. Da $P_Y = \text{id}|_Y$ und $Y \neq \{0\}$ ist das aber ebenfalls klar. ■

Zentral in der Hilbertraumtheorie ist der Begriff der Hilbertraumbasis.

(1.10) Definition. Ein Orthonormalsystem $(\hat{e}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eines unitären Raums X heißt eine Orthonormalbasis oder eine *Hilbertraumbasis*, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(a) Für alle $x \in X$ gilt die Vollständigkeitsrelation

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=1}^n \langle \hat{e}_k, x \rangle \hat{e}_k \right\| = 0$$

(b) Für alle $x, y \in X$ ist

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\langle \hat{e}_k, x \rangle} \langle \hat{e}_k, y \rangle.$$

(c) Für alle $x \in X$ gilt die Parseval-Gleichung

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \hat{e}_k, x \rangle|^2.$$

Beweis. Übung. ■

Bemerkung. (a) Statt (a) kann man auch

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \langle \hat{e}_k, x \rangle \hat{e}_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \hat{e}_k, x \rangle \hat{e}_k$$

schreiben. Dies nennt man die Fourier-Reihe von x .

(b) Die approximierenden Elemente

$$\sum_{k=1}^n \langle \hat{e}_k, x \rangle \hat{e}_k$$

liegen offenbar in $\text{span } S$ wenn $S = \{\hat{e}_k : k \in \mathbb{N}\}$ ist, was sich nicht notwendigerweise auf den Grenzwert überträgt. Falls X aber vollständig ist (also ein Hilbertraum), so sind diese Aussagen äquivalent zu $\overline{\text{span } S}^{\|\cdot\|} = X$.

(1.11) Satz. (a) Für einen unitären Raum X gilt: Jede Hilbertraumbasis ist auch ein vollständiges Orthonormalensystem.

(b) Ist zusätzlich X ein Hilbertraum und $(\hat{e}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalensystem, dann ist $(\hat{e}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ auch eine Hilbertraumbasis.

Beweis. (a) Sei S wie oben. Sei $x \in X$ mit $x \perp S$. Nach (c) gilt dann

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{|\langle \hat{e}_k, x \rangle|^2}_{=0} = \|x\|^2,$$

also $\|x\| = 0$ und $x = 0$.

- (b) Sei nun S ein abzählbares vollständiges Orthonormalsystem und X ein Hilbertraum. Führe den Beweis indirekt. Angenommen, S wäre keine Hilbertbasis. Dann gelten die Eigenschaften (a)-(c) aus der Definition nicht und wegen der obigen Bemerkung ist dann $Y := \overline{\text{span } S} \subsetneq X$. Y ist also ein abgeschlossener Unterraum von X , und da X Hilbertraum ist, damit vollständig. Nach Satz 2.9 ist $X = Y \oplus Y^\perp$. Insbesondere ist also $Y^\perp \neq \{0\}$. Damit gibt es ein $x \in X \setminus \{0\}$ mit $x \in Y^\perp$, also

$$\langle \hat{e}_k, x \rangle = 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ im Widerspruch zur Vollständigkeit von S . ■

Frage. Hat jeder Hilbertraum H mit $\dim H = \infty$ ein abzählbares vollständiges ONS (also eine Hilbertbasis)?

Die Antwort darauf ist nein, aber falls H zusätzlich separabel ist, dann ist sie ja. Dagegen ist die Existenz eines vollständigen Orthonormalsystems (also eventuell überabzählbar, also keine ONB) kein Problem:

(1.12) Satz. In jedem Hilbertraum $X \neq \{0\}$ gibt es ein vollständiges Orthonormalsystem. Es lässt sich sogar jedes ONS S_0 zu einem vollständigen Orthonormalsystem \tilde{S}_0 mit $S_0 \subset \tilde{S}_0$ ergänzen.

Beweis. Simple Anwendung von Zorns Lemma. ■

(1.13) Beispiel. (a) Sei $X = L^2(0, 2\pi)$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dann ist ein VONS in X gegeben durch

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

In der klassischen Fourieranalysis werden Entwicklungen nach diesem VONS S untersucht. Man zeigt dort, dass $\text{span } S$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ dicht liegt in $C_{\text{per}}([0, 2\pi]) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist stetig und } 2\pi\text{-periodisch}\}$. Die Aussage von 2.13(2) und (2.10) liefert nur die Begründung für die Dichtheit von $\text{span } S$ in $\|\cdot\|_{L^2}$.

- (b) Durch $(f, g)_\mu := \int_a^b \mu(t)f(t)g(t) dt$, wobei $\mu > 0$ und stetig auf (a, b) , ist auf $L^2(a, b)$ ein reelles Skalarprodukt definiert. Für verschiedene Gewichtsfunktionen μ und verschiedene Wahlen von (a, b) erhält man μ -orthogonale Polynomsysteme durch Anwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens auf die Monome $\{t^i : i \in \mathbb{N}_0\}$.

(i) $a = -1, b = 1, \mu(t) = 1$ liefert die Legendre-Polynome.

(ii) $a = -1, b = 1, \mu(t) = 1$ liefert die Tschebyscheff-Polynome. Das stimmt nicht, danke, dass du die Folie so lange gezeigt hast.

- (iii) $a = 0, b = \infty, \mu(t) = 1$ liefert die Laguerre-Polynome. Das stimmt nicht, danke, dass du die Folie so lange gezeigt hast.
- (iv) $a = -\infty, b = \infty, \mu(t) = \exp(-t^2)$ liefert die Hermite-Polynome.
- (c) Ist X ein unitärer Raum mit ONB, kann er formal vervollständigt werden: Sei also $(\hat{e}_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset X$ diese ONB, dann ist

$$H := \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k \hat{e}_k : (c_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2 \right\}$$

ist ein Hilbertraum, den man die Vervollständigung von X nennt. Das Skalarprodukt zwischen $x = \sum_{k \in \mathbb{N}} c_k \hat{e}_k$ und $y = \sum_{k \in \mathbb{N}} d_k \hat{e}_k$ wird definiert als

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c_k} d_k.$$

Tatsächlich kann H mit dem Koordinatenraum $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{N})$ identifiziert werden. Die Abbildung

$$\Phi : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow H, (c_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} c_k \hat{e}_k$$

ist linear, bijektiv und normerhaltend wegen der Parsevalgleichung

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle \hat{e}_k, x \rangle|^2.$$

Also $\ell^2(\mathbb{N})$ und H isometrisch und insbesondere H vollständig.